Министерство образования Московской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательно учреждение
Московской области «Авиационный техникум имени В.А. Казакова»

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора по УМР
_______________М.В.Иванова

Цикловая комиссия «Производство летательных аппаратов»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

по дисциплине **по дисциплине ОП.02 Техническая механика**

для студентов 2,3 курса

специальности 25.02.06 Производство и обслуживание авиационной техники

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии

Председатель ЦК:
____________________ Сафонова С.В.

СОСТАВИЛ:
Н.Ю.Лепинд____________

г. Жуковский, 2020

Введение

Учебная дисциплина ОП.02 «Техническая механика» является фундаментом общетехнической подготовки и изучается студентами специальности 25.02.06 Производство и обслуживание авиационной техники.

Важнейшими разделами дисциплины «Техническая механика» считаются «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов».

Изучение этих разделов, обеспечивают общепрофессиональную подготовку студентов, устанавливают базовые знания, соответствующие программе курса подготовки студентов по специальности. Освоение дисциплины предполагает практическое осмысление её разделов и тем на всех видах занятий, в процессе которых обучаемый должен закрепить и углубить теоретические знания, приобрести необходимые умения.

При разработки учебно-методического пособия по выполнению расчётно-графических самостоятельных и контрольных работ учитывалась специализация обучаемых, поэтому индивидуальные задания включают задачи, непосредственно связанные со специальностью.

Учебно-методическое пособие содержит расчётно-графические задания и методические указания по их выполнению. Изложены необходимые для решения задания основные элементы теории расчёта по четырём разделам: «Статика», «Кинематика», «Динамика», «Сопротивление материалов». Даны варианты заданий расчётно-графических работ, приведены примеры их выполнения.

Большой объём и сложность учебной информации по технической механике делает необходимым вынести не только часть учебных вопросов на внеаудиторное, самостоятельное изучение, но и выполнение контрольных заданий.

С этой целью программой дисциплины предусматривается проведение самостоятельной внеаудиторная работы, которая выполняется обучающимся по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Объём времени, отведенный на самостоятельную внеаудиторную работу, определяется рабочей программой учебной дисциплины.

Самостоятельная работа обучающихся проводится с целью:

- развития познавательных способностей и активности обучающихся в учебном процессе;
- развития творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную и специальную литературу;
- контроля и оценки уровня освоения студентом учебного материала.

Содержание самостоятельной внеаудиторной работы определяется в соответствии с рекомендуемыми видами заданий согласно рабочей программы учебной дисциплины. Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объёма, конкретной тематики работы, уровня сложности задания и уровня умений студентов выполнять эти работы.

Критериями оценки результатов самостоятельной внеаудиторной работы студента являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умения студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с предъявляемыми требованиями.

В результате выполнения работ обучаемый должен овладеть навыками и приобрести опыт работы с нормативными документами, технической и технологической документацией.

Работа содержит восемь расчётно-графических заданий, в каждом из которых рассмотрен пример решения задания и основные элементы теории расчёта. В статике и кинематике задания имеют разный уровень сложности.
Это даёт возможность, при распределении заданий, учитывать исходный уровень теоретической подготовки и индивидуальные способности обучаемых. Тематика расчётно-графических заданий соответствует содержаниям рабочих программ и требованиям к результатам её освоения.

Предлагаемое учебно-методическое пособие может являться руководством по решению задач учебной дисциплины и всей программы курса подготовки студентов.

Учебно-методическое пособие может быть использовано и при освоении учебных программ дополнительного образования, повышения квалификации и профессиональной переподготовке обучаемых по техническим специальностям.

Методические указания по выполнению самостоятельных и контрольных расчётно-графических работ по технической механике

Выполнение самостоятельных и контрольных расчётно-графических работ является одним из основных видов учебной работы обучающихся по техническим специальностям. К выполнению расчётно-графической работы следует приступать после изучения теоретического материала и ознакомления с последовательностью выполнения задания.

Самостоятельные и контрольные работы содержат решение нескольких заданий, которые охватывают значительную часть изучаемой дисциплины. Каждый обучающийся должен выполнить один из вариантов работы в сроки, предусмотренные учебным графиком.

Рецензирование контрольных работ производит преподаватель. В случае, если контрольная работа не зачтена, все исправления, которые выполняются обучающимся, приводятся в той же контрольной работе после подписи рецензента без исправления первоначального текста и вновь представляются на проверку.

В каждом задании приведена таблица с вариантами. Номер варианта для обучающегося определяется предпоследними и последними цифрами (шифра) номера его зачетной книжки или порядковым номером списка учебной группы в журнале. Кроме того, преподаватель может назначить номер варианта обучаемому с учётом его индивидуальных возможностей.

К представленным на проверку контрольным работам предъявляются следующие требования по оформлению:

- начинается работа с оформления титульного листа. Пример оформления титульного листа представлен на рис.1;
- на титульном листе отчёта по контрольной работе необходимо указать: номер задания, название темы работы, номер учебной группы, фамилию и инициалы студента, дату выполнения работы, фамилию и инициалы преподавателя;
- отчёт по контрольной работе выполняется от руки чернилами или набирается с применением ЭВМ на листах белой бумаги формата А4. Поля: левое – 20 мм, правое – 10 мм, верхнее и нижнее – по 15 мм;
- страницы нумеровать;
- задачи располагать в порядке возрастания номеров, начиная с новой страницы;
- текст задач переписывать полностью вместе с рисунками, заданными условием задачи;
- рисунки, графики, схемы, в том числе и заданные условием задачи, должны быть выполнены аккуратно и в удобном для чтения масштабе;
- все рисунки и формульные зависимости в тексте нумеровать в порядке возрастания номеров;
- на расчётных схемах и эпюрах приводить числовые значения нагрузок, опорных реакций и других параметров с указанием их единиц измерений;
- расчёт каждой исходной величины следует выполнить сначала в общем виде, а затем в полученную формулу подставить числовые значения;
- решения задач сопровождать в тексте пояснениями, делая ссылки на номера рисунков и формульных зависимостей;
- результаты вычислений округлять до первых трёх значащих цифр;
- все основные пункты решения задачи и выводы должны быть подробно объяснены;
- при построении графиков оси координат следует обозначать символами, общепринятыми для соответствующих величин, на осях наносятся масштабы выбранных единиц;
- замечания преподавателя не стирать;
- устранение замечаний преподавателя и исправления ошибочных расчётов производить на чистой стороне листа, не переписывая задание.

Контрольная работа засчитывается, если решения всех заданий не содержат ошибок принципиального характера, и отвечают всем вышеперечисленным требованиям.

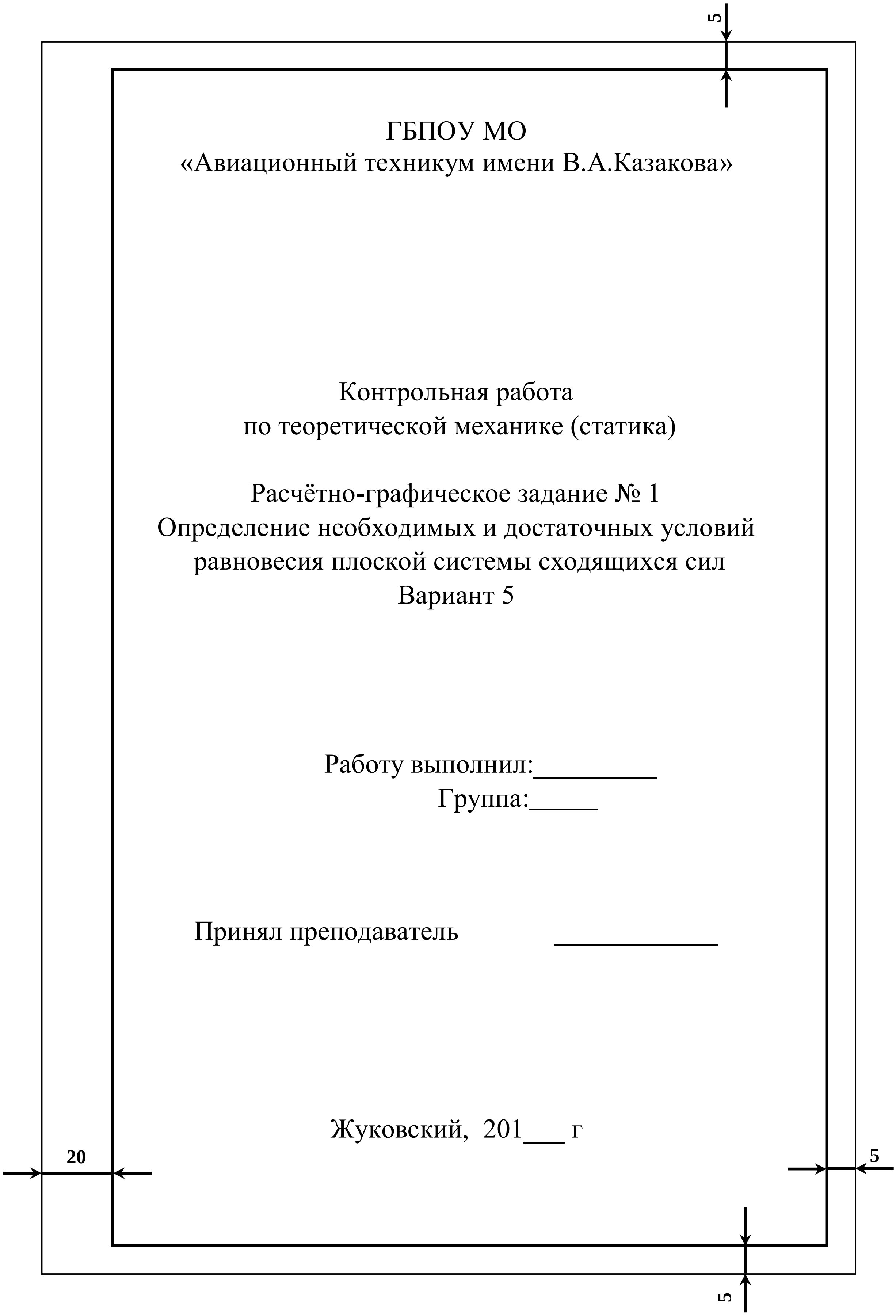


Рис. 1. Титульный лист контрольной работы

Расчётно-графические работы по технической механике

I. Расчётно-графические работы по разделу «Статика»

Тема 1. Равновесие плоской системы сходящихся сил. Определение реакций связей.

Статикой называют раздел теоретической механики, рассматривающий общие свойства сил и условия равновесия материальных тел, то есть условия, при которых приложенные к телу силы не изменяют его кинематического состояния. Система сил, под действием которой тело не изменяют своего кинематического состояния, называется уравновешенной системой.

В разделе «Статика» в основу выполнения самостоятельных и контрольных работ входят два типа задач:

- задачи равновесия системы сходящихся сил;
- задачи равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.

Основные элементы теории расчёта и методические указания к решению задач равновесия системы сходящихся сил.

Необходимым и достаточным условием равновесия плоской системы сходящихся сил является равенство нулю равнодействующей этой системы сил. Это условие можно выразить одним векторным равенством

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}_i} \qquad (1.1)$$

Или двумя алгебраическими равенствами:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{xi} = \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{yi} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (1.2)$$

Векторное равенство (1.1) выражает условие замкнутости силовой ломанной линии, составленной из этих сил, то есть условие равновесия плоской системы сходящихся сил в геометрической форме.

Алгебраические равенства (1.2) выражают условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме. Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций сил на координатные оси были равны нулю.

При решении задач геометрическим (графическим) способом необходимо придерживаться следующего порядка:

1. Выделить тело (узел или точку), равновесие которого следует рассматривать в данной задаче.
2. Выявить все действующие на выделенное тело нагрузки (заданные активные силы) и изобразить их на схеме в виде векторов с указанием точек приложения.
3. Освободить это тело от наложенных на него связей, заменив их действия реакциями связей, и изобразить эти реакции в виде векторов на схеме.

4. Построить замкнутый силовой многоугольник (или треугольник – если действуют три силы). При этом следует сначала сложить все заданные, а затем достроить неизвестные силы.

5. Решить силовой многоугольник (по известным элементам определить неизвестные) или, если силовой многоугольник построен в масштабе, определить искомые силы по масштабу.

При решении задач аналитическим способом рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выделить тело (узел или точку), равновесие которого следует рассматривать в данной задаче.

2. Выявить все действующие на выделенное тело нагрузки (заданные активные силы) и изобразить их на схеме в виде векторов с указанием точек приложения.

3. Освободить это тело от наложенных на него связей, заменив их действия реакциями связей, и изобразить эти реакции в виде векторов на схеме.

4. Выбрать декартовую систему координат, относительно которой предполагается составление уравнений равновесия. Координатные оси следует по возможности направлять по неизвестным силам, тогда проекция неизвестной силы на перпендикулярную ей ось окажется равной нулю. Благодаря этому в уравнение равновесия войдёт только одно неизвестное.

5. Составить уравнения равновесия плоской системы сил (1.2).

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{F}_{\mathbf{xi}} = \mathbf{0} \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{F}_{\mathbf{yi}} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (1.2)$$

В случае, когда по условию требуется определить лишь некоторые неизвестные силы, надо составлять те уравнения равновесия, которые необходимы для получения ответа.

6. Решить составленную систему всех уравнений равновесия относительно неизвестных. Если неизвестная сила в результате решения получится отрицательной, то значит направление её противоположно принятому первоначально.

При решении расчётно-графических задач целесообразно учитывать, что преимущества аналитического способа решении задач (решения методом проекций) перед геометрическим (графическим) способом решения силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие системы более трёх сил.

Пример решения задания. Рассмотрим пример решения задания, условия которого показаны на рис. 2.

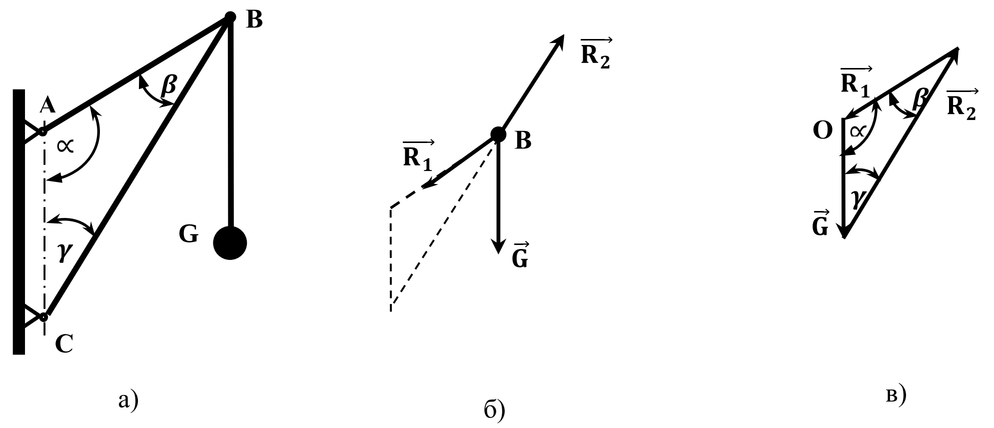


Рис. 2. Схема расчётно-графического решении задачи
а) схема механизма, б) расчётная схема, в) силовой треугольник

Задание. В шарнире **В** кронштейна **АВС** подвешен груз силой тяжести **G**, равной 100 Н. Определить графическим и аналитическим способами усилия в стержнях кронштейна, если $\propto = 110^\circ, \beta = 30^\circ, \ \gamma = 40^\circ$ (рис. 2, а).

Решение. Шарнир **В** находится в состоянии покоя (рис. 2, б). Рассмотрим условие его равновесия. К шарниру **В** приложена активная сила $\vec{\mathbf{G}}$. Отбросим связи, заменив их реакциями $\overrightarrow{\mathbf{R_1}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{R_2}}$. Предположим, что стержень **АВ** работает на растяжение, а **ВС** – на сжатие. Тогда силы реакции этих стержней $\overrightarrow{\mathbf{R_1}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{R_2}}$ будут направлены вдоль этих стержней, так как показано на рис. 2, б.

И так на узел **В** действует система трёх сходящихся сил. Условие равновесия шарнира **В** можно записать в виде (1.3).

$$\vec{\mathbf{G}} + \overrightarrow{\mathbf{R_1}} + \overrightarrow{\mathbf{R_2}} = 0 \qquad (1.3)$$

Для решения этого равенства применим геометрический способ сложения векторов. Так как шарнир **В** находится в состоянии равновесия, то силовая ломанная линия, составленная из этих сил, должна быть замкнута. Таким образом должен получиться силовой треугольник. Порядок построения силового треугольника может быть выполнен следующим способом. Из некоторой точки **O** (рис. 2, в) в выбранном масштабе строим вектор $\vec{\mathbf{G}}$, а затем из его начала и конца проводим прямые, параллельные направлениям векторов $\overrightarrow{\mathbf{R_1}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{R_2}}$ до их пересечения. По масштабу находим $\mathbf{R_1}$ = 130 Н, $\mathbf{R_2}$ = 190 Н.

Совершая обход силового треугольника в направлении силы $\vec{\mathbf{G}}$, замечаем что полученные направления реакций стержней совпадают с первоначально выбранными. Следовательно, стержень **АВ** работает на растяжение, а стержень **ВС** работает на сжатие.

Отметим, что порядок построения силовой ломанной линии (силового треугольника) может быть другим, но это не влияет на результат решения этой задачи.

Модули сил $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$ можно определить аналитическим способом по теореме синусов

$$\frac{\mathbf{G}}{\sin \boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{R_1}}{\sin \gamma} = \frac{\mathbf{R_2}}{\sin \propto} \qquad (1.4)$$

Откуда

$\mathbf{R_1} = \mathbf{G}\,\frac{\sin \gamma}{\sin \boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{R_1} = 100\,\frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 128{,}6$ (Н),

$\mathbf{R_2} = \mathbf{G}\,\frac{\sin \propto}{\sin \boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{R_2} = 100\,\frac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ} = 188$ (Н).

Несовпадение результатов, полученных графическим и расчётным путями, не превышает примерно 1 % . Несовпадение с точностью до 1 %
результатов, найденных двумя независимыми способами, даёт возможность сделать вывод о достоверности полученного ответа.

Расчётно-графическое задание № 1. Определение необходимых и достаточных условий равновесия плоской системы сходящихся сил

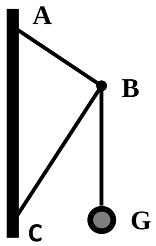
Расчётно-графическое задание уровня сложности А

По данным табл. 1. 1, в соответствии с вариантом контрольной работы, определите необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

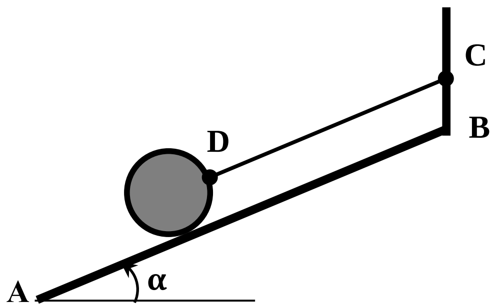
Таблица 1. 1

Варианты заданий

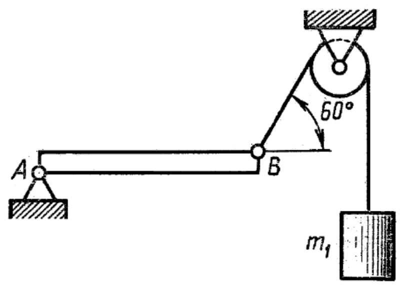
<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1 ÷ 5</td></tr>
<tr><td>



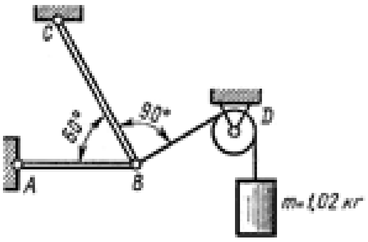
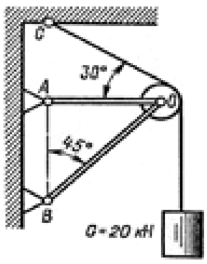
</td><td>Кран состоит из цепи **AB** = 1,2 м и подкоса **BC** = 1,6 м, прикреплённых к вертикальной стойке в точках **A** и **C**, причём **AC** = 2, 4 м. В точке **B** подвешен груз весом 30 кН. Определите усилия T_1 в цепи и в T_2 в подкосе.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 6 ÷ 10</td></tr>
<tr><td>



</td><td>На гладкой наклонной плоскости **AB**, образующей **с** горизонтом угол $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{30}^{\circ}$, при помощи верёвки **DC**, параллельной **AB**, удерживается однородный шар весом 4Н. Определите давление шара на плоскость и натяжение верёвки **DC**.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 11 ÷ 15</td></tr>
<tr><td>



</td><td>Однородная балка массой **m** равной 500 кг удерживается в горизонтальном положении тросом, перекинутым через блок и несущим груз. Определить массу груза $\mathbf{m_1}$ и реакцию шарнира **A**.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 16 ÷ 20</td></tr>
</table>

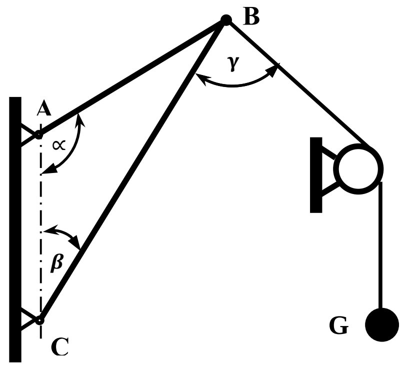
<table>
<tr><td>
</td><td>Определите силы в стержнях AB и BC. Решение выполните аналитически и графически, результаты сравните. Массу нити, несущей груз, не учитывайте.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 21 ÷ 25</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Определите аналитически и графически силы в стержнях AO и BO. Результаты сравните, массу троса не учитывайте.</td></tr>
</table>

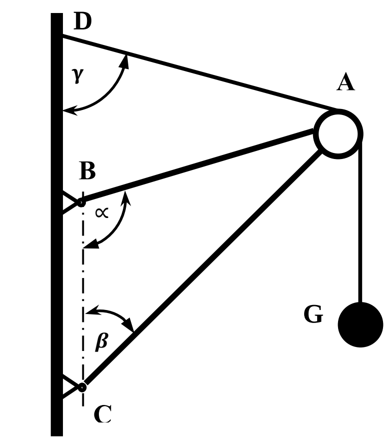
Расчётно-графическое задание уровня сложности В, С

По данным табл. 1. 2 и табл. 1. 3, в соответствии с вариантом контрольной работы, определите необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Таблица 1. 2

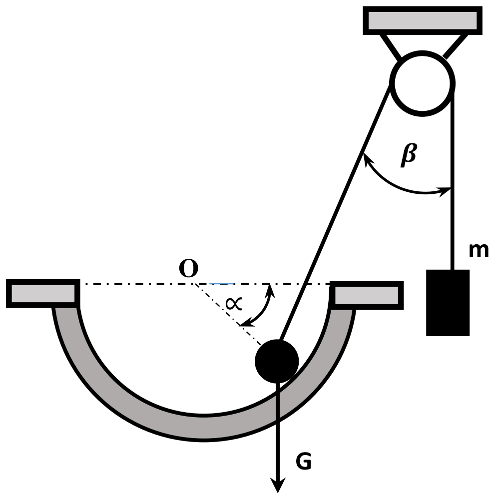
Варианты заданий

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1 ÷ 10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>К шарниру B прикреплён трос, перекинутый через блок и несущий груз силой тяжести G. Определите силы в стержнях для исходных данных, представленных в
таблице 1. 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 11 ÷ 20</td></tr>
</table>



Груз силой тяжести **G** удерживается тросом, перекинутым через блок **A**, ось которого укреплена на стержнях **AB** и **AC**. Определите силы в стержнях для исходных данных, представленных в таблице 1. 3.

Вариант 21 ÷ 30



Шар, сила тяжести которого **G**, удерживается в равновесии на гладкой полусфере с помощью невесомой нити, перекинутой через блок и несущей груз. Определите силу давления шара на полусферу и массу груза **m**, для исходных данных, представленных в таблице 1. 3.

Таблица 1. 3

Варианты исходных данных к задачам уровня сложности B, C

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
G, кН	10	20	40	55	60	40	35	40	50	35
α, °	90	75	120	150	45	60	120	45	30	45
β, °	40	30	15	15	90	105	30	125	75	115
γ, °	105	30	135	40	50	60	75	105	30	50
Вариант 11 ÷ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
G, кН	200	400	600	300	400	500	250	350	240	320
α, °	30	30	45	30	45	45	60	60	60	30
β, °	30	60	45	90	30	45	60	15	90	120
γ, °	60	30	30	45	45	45	90	30	45	60
Вариант 21 ÷ 30										

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
G, кН	30	20	16	24	48	32	60	50	45	30
$\boldsymbol{\alpha}$, °	30	30	30	45	60	30	60	45	60	60
$\boldsymbol{\beta}$, °	30	45	60	30	60	60	45	45	30	45

Тема 2. Равновесие плоской системы произвольно расположенных сил. Определение реакций связей.

Основные элементы теории расчёта и методические указания к решению задач равновесия плоской системы произвольно расположенных сил

Для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{\mathbf{F}}$ и главный момент $\overrightarrow{\mathbf{M}_{\mathrm{o}}}$ этой системы относительно любого произвольно выбранного центра **O** равнялись нулю, то есть

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{F}_i} = 0 \\ \overrightarrow{\mathbf{M}_{\mathrm{o}}} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{n} \mathbf{M}_{\mathrm{oi}} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (1.5)$$

В векторной форме эти два условия (1.5) применять для решения задач неудобно. Спроектировав вектора $\vec{\mathbf{F}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{M}_{\mathrm{o}}}$ на оси декартовой системы координат, получим

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{n} \mathbf{F}_{\mathrm{xi}} = 0 \\ \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{n} \mathbf{F}_{\mathrm{yi}} = 0 \\ \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{n} \mathbf{M}_{\mathrm{oi}} = 0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Эти уравнения (1.6) называются **основными уравнениями** равновесия плоской системы произвольно расположенных сил. Центр моментов и направление координатных осей для этой системы уравнений можно выбирать произвольно. Для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую, любым образом выбранных координатных осей, лежащих в плоскости действия сил, и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки той же плоскости. Отметим, что существуют и две другие системы трёх уравнений равновесия сил.

При решении задач равновесия плоской системы произвольно расположенных сил важно знать свойства опорных устройств балочных систем. Очень часто в машинах и конструкциях встречаются тела удлинённой формы, называемые балками или балочными системами. Балки в основном предназначены для восприятия поперечных нагрузок. Балки имеют специальные опорные устройства для сопряжения их с другими элементами и передачи на них усилий.

Применяются следующие виды опор.

Шарнирно – подвижная опора. Такая опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейные перемещения параллельно опорной плоскости. В этой опоре известны точка приложения опорной реакции – центр шарнира и её направление – перпендикуляр к опорной плоскости. Опорная плоскость шарнирно – подвижной опоры может быть не параллельна оси балки.

Шарнирно – неподвижная опора. Эта опора допускает поворот вокруг оси шарнира, но не допускает никаких линейных перемещений. В данном случае известна только точка приложения опорной реакции – центр шарнира.

Жесткая заделка (**защемление**). Эта опора не допускает поворота вокруг оси шарнира и никаких линейных перемещений. Неизвестными в данном случае являются не только значение и направление реакции, но и точка её приложения. Поэтому в жесткой заделке появляются три неизвестных реактивных усилий: вертикальная реакция $\mathbf{R}_{\mathrm{Y}}$, горизонтальная реакция $\mathbf{R}_{\mathrm{X}}$ и реактивный момент заделки $\mathbf{M}_{3}$.

При практическом решении задач можно пользоваться любой формой уравнений равновесия, так как они все совершенно равноправны. Изложим некоторые общие правила составления уравнения равновесия.

Оси декартовой системы координат и моментные точки можно выбирать произвольно. Наиболее просто и безошибочно решаются уравнения равновесия, в которые входит одно неизвестное. Следовательно, координатные оси надо направлять перпендикулярно к направлению неизвестных сил. Тогда при составлении уравнений проекций неизвестные, перпендикулярные к осям, в эти уравнения не войдут.

За моментные точки целесообразно брать такие точки, в которых пересекаются линии действия двух неизвестных сил. Тогда в уравнение моментов войдёт только одна искомая сила. Для плоской системы произвольно расположенных сил можно выбирать любое число координатных осей и моментных точек и составлять соответствующее число уравнений равновесия, но только три из них будут независимыми. Остальные уравнения получаются как следствия из этих трёх и их можно использовать лишь для проверки.

Для плоской системы произвольно расположенных сил эти общие правила конкретизировать. Оси декартовой системы координат следует направлять так, чтобы одна из них оказалась параллельной силам, приложенным к телу. Уравнение моментов нужно составлять относительно точки, лежащей на линии действия неизвестной силы. Это даёт возможность определить одну из неизвестных сил непосредственно из одного уравнения моментов. Для решения задач при помощи двух моментов следует учитывать, что моментные точки не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Задачи на равновесие твёрдого тела, при действии на него плоской системы произвольно расположенных сил, рекомендуется решать в следующей последовательности:

1. Выделить тело (узел или точку), равновесие которого следует рассматривать в данной задаче.

2. Выявить все действующие на выделенное тело нагрузки (заданные активные силы) и изобразить их на схеме в виде векторов с указанием точек приложения.

3. Освободить это тело от наложенных на него связей, заменив их действия реакциями связей, и изобразить эти реакции в виде векторов на схеме.

4. Выбрать декартовую систему координат, относительно которой предполагается составление уравнений равновесия и выбрать моментные точки. Координатные оси следует по возможности направлять по неизвестным силам, тогда проекция неизвестной силы на перпендикулярную ей ось окажется равной нулю. Благодаря этому в уравнение равновесия войдёт только одно неизвестное.

5. Составить уравнения равновесия плоской системы произвольно расположенных сил (1.6).

6. Решить составленную систему всех уравнений равновесия относительно неизвестных. Если неизвестная сила в результате решения получается положительной, то это означает, что направление её выбрано верно. Если неизвестная сила в результате решения получается отрицательной, то это означает, что направление её необходимо заменить на противоположное, принятому первоначально.

После того как задача решена, необходимо произвести проверку. Для этого следует составить не применявшуюся при решении сумму моментов или проекций, при этом необходимо учитывать уже исправленные направления реакций. Равенство нулю алгебраической суммы проекций или моментов подтвердит правильность решения задачи.

Пример решения задания и основные элементы теории расчёта

Рассмотрим пример решения задания, условия которого показаны на рис. 3.

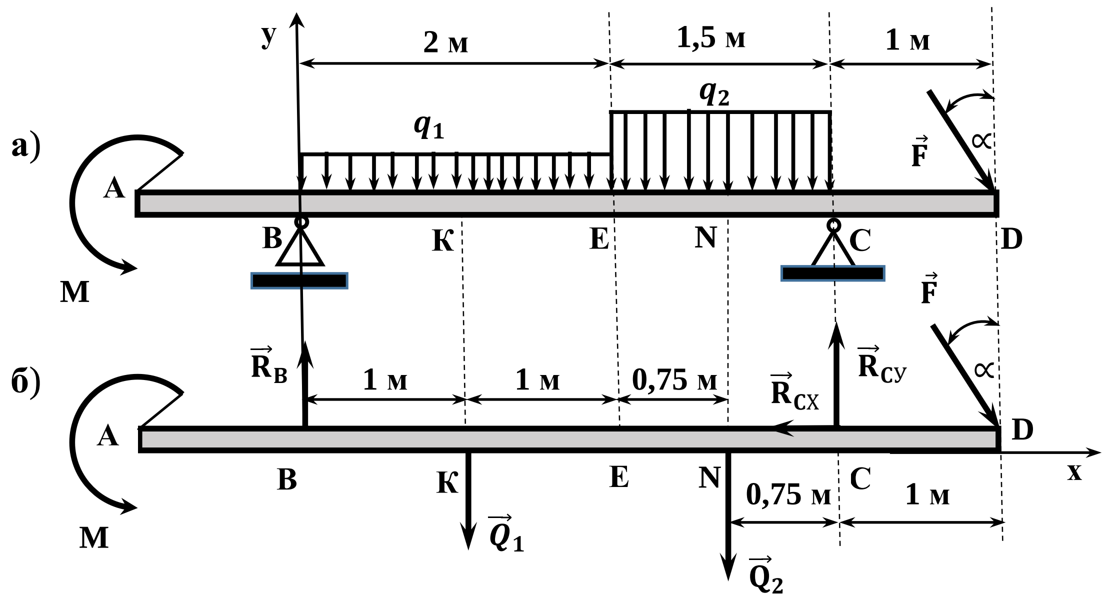


Рис. 3. Схема расчётно-графического решении задачи
а) схема механизма, б) расчётная схема

Задание. Определить реакции опор двух консольной балки, нагруженной силой **F** = 400 Н (действующей на балку в точке **D** под углом $\propto = 30^{\circ}$ от вертикали), двумя равномерно распределёнными нагрузками интенсивностью $\mathbf{q_1}$ = 100 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$, $\mathbf{q_2}$ = 200 $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$ и парой сил с моментом **M** = 2000 Н · м (Рис. 3, а).

Решение. Заменим равномерно распределённые нагрузки сосредоточенными силами $\vec{\mathbf{Q}}_1$ и $\vec{\mathbf{Q}}_2$, приложенных в точках **К** (середина отрезка **BE**) и **N** (середина отрезка **CE**):

$\mathbf{Q_1} = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{BE}$, $\mathbf{Q_1}$ = 100 · 2 = 200 (Н), $\mathbf{Q_2} = \mathbf{q_2} \cdot \mathbf{CE}$, $\mathbf{Q_2}$ = 200 · 1,5 = 300 (Н).

Рассмотрим равновесие балки. К ней приложены активные нагрузки $\vec{\mathbf{Q}}_\mathbf{1}$, $\vec{\mathbf{Q}}_\mathbf{2}$, $\vec{\mathbf{F}}$ и **М**. Отбросим связи. Подвижную опору **В** заменяем вертикальной реакцией $\vec{\mathbf{R}}_\mathbf{B}$, а неподвижную опору **С** – горизонтальной составляющей реакции опоры в этой точке $\vec{\mathbf{R}}_\mathbf{CX}$ и вертикальной составляющей реакции опоры $\vec{\mathbf{R}}_\mathbf{Cy}$ (Рис. 3, б). Имеется три неизвестных – задача статически определима.

Направим оси декартовой системы координат так, как показано на рисунке, выбираем точку **С**, в качестве моментной точки, относительно которой находим сумму всех моментов сил, действующих на балку. Составляем уравнения равновесия (1.7):

$$\begin{cases} \sum_{\mathbf{i=1}}^{n} \mathbf{F}_{\mathrm{xi}} = 0 \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n} \mathbf{F}_{\mathrm{yi}} = 0 \\ \sum_{\mathbf{i=1}}^{n} \mathbf{M}_{\mathrm{C}} = 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

Применительно к условиям рассматриваемой задачи система (1.7) принимает вид:

$$\begin{cases} \mathbf{R_{CX}} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{\cos 60^\circ} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{R_B} - \boldsymbol{Q_1} - \boldsymbol{Q_2} + \boldsymbol{R}_{\mathrm{Cy}} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{\sin 60^\circ} = \mathbf{0}; \\ -\boldsymbol{F} \cdot \mathbf{\sin 60^\circ} \cdot \mathbf{1} + \boldsymbol{Q_2} \cdot \mathbf{0,75} + \boldsymbol{Q_1} \cdot \mathbf{0,25} - \mathbf{R_B} \cdot \mathbf{3,5} + \mathbf{M} = \mathbf{0}. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$\mathbf{R_{CX}} = -$ 200 Н, $\mathbf{R_{Cy}}$ = 166 Н, $\mathbf{R_B}$ = 680 Н. Направление горизонтальной реакции в опоре **С** соответствует рисунку. Для проверки составим сумму моментов относительно точки **Е**:

$$\sum_{\mathbf{i=1}}^{n} \mathbf{M}_{\mathrm{Ei}} = \mathbf{M} - \mathbf{R_B} \cdot \mathbf{2} + \mathbf{Q_1} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{Q_2} \cdot \mathbf{0,75} + \mathbf{R_{Cy}} \cdot \mathbf{1,5} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{\sin 60^\circ} \cdot \mathbf{2,5} =$$

$$= \mathbf{2000 - 680 \cdot 2 + 200 \cdot 1 - 300 \cdot 0,75 + 166 \cdot 1,5 - 400 \cdot 0,866 \cdot 2,5} =$$

= **2450 – 2445** $\cong \mathbf{0}$.

Погрешность вполне допустима

$$\varepsilon = \frac{2450 - 2445}{2445} = 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

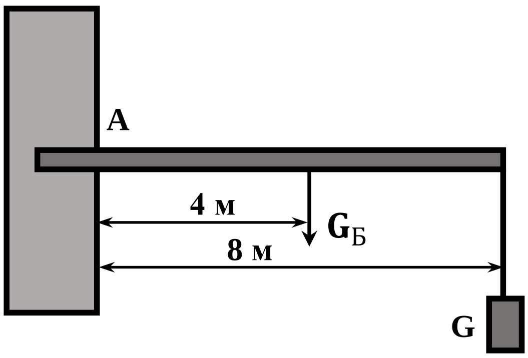
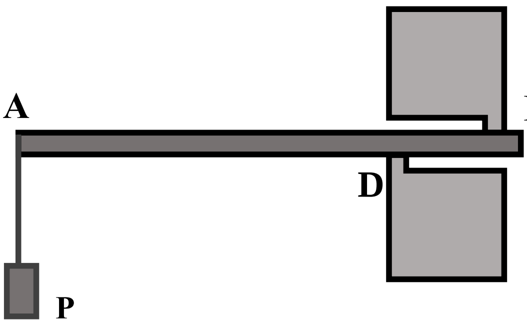
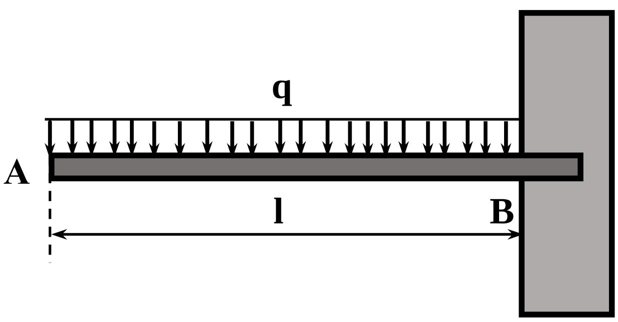
Расчётно-графическое задание № 2. Определение необходимых и достаточных условий равновесия плоской системы произвольно расположенных сил

Расчётно-графическое задание уровня сложности А

По данным табл. 1. 4, в соответствии с вариантом контрольной работы, определите необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Таблица 1. 4

Варианты заданий

Вариант 1 ÷ 10	
	Определите опорные реакции жёсткой заделки (защемления) однородной консольной балки силой тяжести $\mathbf{G_Б} = 0,4$ кН. Длина балки 8 метров. На конце балки подвешен груз весом **G** = 1 кН.
Вариант 11 ÷ 20	
	Однородная горизонтальная балка **AB**, весом **G =** 2 кН опирается на стену в точках **B** и **D**. Вес подвешенного груза **P** = 1 кН. Размеры балки: **AB =** 4 м; **DB** = 0, 5 м. Определите опорные реакции в точках **B** и **D** и их реактивный момент.
Вариант 21 ÷ 30	
	Горизонтальная балка **AB**, длиной **l** = 1, 2 м, поддерживающая балкон, жёстко заделана в стену. На балкон действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $\mathbf{q} = 1,25\,\frac{кН}{м}$. Определите опорные реакции жёсткой заделки.

Расчётно-графическое задание уровня сложности B, C

По данным табл. 1. 5 и табл. 1. 6, в соответствии с вариантом контрольной работы, определите необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Таблица 1. 5

Варианты заданий

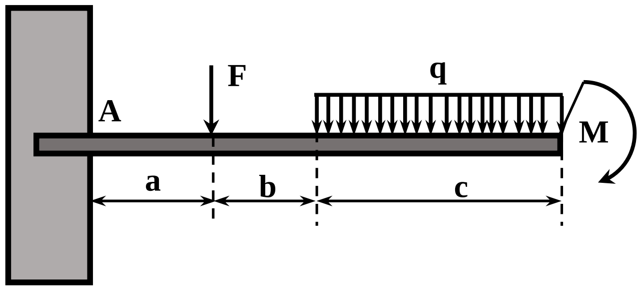
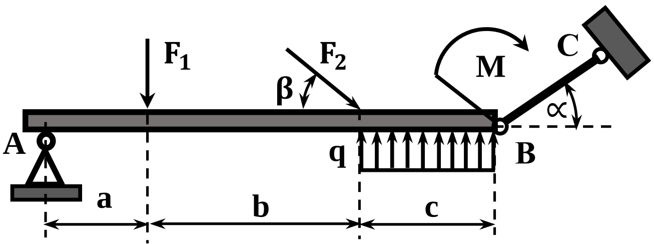
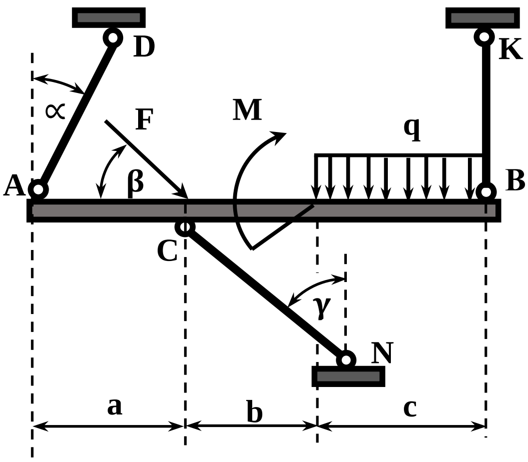
Вариант 1 ÷ 10	
	Определите опорные реакции жёсткой заделки (защемления) однородной невесомой консольной балки для исходных данных, представленных в таблице 1. 6.
Вариант 11 ÷ 20	
	Невесомая балка **AB** удерживается горизонтально неподвижным шарниром **A** и стержнем **BC**. Определите опорные реакции для исходных данных, представленных в таблице 1. 6.
Вариант 21 ÷ 30	
	Горизонтальная балка **AB** удерживается стержнями **AD**, **BK** и **CN**. Определите силы в удерживающих стержнях для: $\mathbf{F} = 100$ кН, $\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{q} = \frac{F}{c}$ и исходных данных, представленных в таблице 1. 6.

Таблица 1. 6

Варианты исходных данных к задачам уровня сложности В, С

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F, кН	10	15	20	40	50	30	35	40	50	60
q, $\frac{кН}{м}$	20	30	40	35	20	25	15	10	20	25
М, кН·м	40	- 50	35	- 20	100	- 70	- 80	75	120	- 40
а, м	2	3	0, 4	0, 6	0, 4	0, 5	2	3	0, 8	0, 5
в, м	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
с, м	3	4	4	4	5	3	2	2	3	4
Вариант 11 ÷ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$\mathbf{F_1}$, кН	30	40	50	40	30	20	40	50	60	30
$\mathbf{F_2}$, кН	60	40	40	60	50	30	70	80	50	40
М, кН·м	25	30	35	40	55	70	10	15	20	25
q, $\frac{кН}{м}$	10	15	20	25	15	15	20	25	30	15
$\boldsymbol{\alpha}$, °	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
$\boldsymbol{\beta}$, °	45	30	45	60	30	60	45	30	45	45
а, м	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
в, м	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
с, м	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Вариант 21 ÷ 30										
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
а, м	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
в, м	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
с, м	3	3	2	2	3	3	2	2	3	3
$\boldsymbol{\alpha}$, °	30	45	30	45	30	45	30	45	30	45
$\boldsymbol{\beta}$, °	45	30	45	30	45	30	60	45	60	60
$\boldsymbol{\gamma}$, °	60	45	60	60	60	60	45	60	45	45

II. Расчётно-графические работы по разделу «Кинематика».

Тема. Определение кинематических характеристик плоскопараллельного сложного движения твёрдого тела

Основные элементы теории решения задач определения кинематических характеристик плоскопараллельного сложного движения твёрдого тела.

Кинематикой называют раздел теоретической механики, изучающий геометрические свойства движения тел в пространстве без учёта их массы и действующих на них сил. При движении твёрдого тела различные его точки могут двигаться по-разному. Поэтому в кинематике сначала изучается движение точки, а затем – движение твёрдого тела.

Изучить движение – значит узнать, как изменяется его положение в пространстве с течением времени. Механическое движение тела – это изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени. Определение положения тела в любой момент времени является основной задачей механики. Для решения основной задачи механики необходима система отсчёта. Система отсчёта – это тело отсчёта, относительно которого рассматривают положение других тел, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени. Системы отсчёта бывают инерциальные и неинерциальные. Инерциальные системы отсчёта (ИСО) – системы, в которых тело отсчёта не имеет ускорение. Система отсчёта, движущаяся по отношению к ИСО с ускорением, является неинерциальной системой отсчёта (НИСО). Система отсчёта необходима для решения основной задачи кинематики. Основная задача кинематики – это установление (при помощи тех или иных математических методов) способов задания движения точек или тел и определение соответствующих кинематических характеристик этих движений.

В кинематике для задания закона движения точки применяются три способа: векторный, координатный и естественный.

Задачи, относящиеся к «Кинематике точки», можно разделить на следующие:

- составление уравнений движения точки, исходя из условий данной задачи;
- определение траектории, скорости и ускорения движущейся точки при координатном способе задания движения;
- определение траектории, скорости и ускорения движущейся точки, когда её движение задаётся естественным способом.

Твёрдые тела в пространстве могут совершать различные виды движения. Все эти движения обычно подразделяются на поступательное, вращательное, плоскопараллельное, и свободное движения.

Кинематику твёрдого тела начинают изучать с простейших видов движения – поступательного и вращательного. Все остальные виды движений могут быть представлены в виде совокупности поступательных и вращательных движений.

Из теоремы поступательного движения тела следует, что изучение этого движения сводится к изучению движения точки. К основным кинематическим характеристикам движения точки относятся: траектории, скорости и ускорения движущихся точек.

При вращательном движении положение тела в пространстве будет определяться положением оси вращения и углом поворота тела $\boldsymbol{\varphi}$. Угол поворота тела $\boldsymbol{\varphi}$ – это угол между неподвижной плоскостью, проходящей через ось вращения и плоскостью, неизменно связанной с вращающимся телом и также проходящей через ось вращения. Его часто называют угловым перемещением данного тела. При вращении тела вокруг оси угол поворота тела изменяется с течением времени.

$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$ (2.1)

Зависимость углового перемещения тела от времени (2.1) называется уравнением вращательного движения тела.

К основным кинематическим характеристикам вращающихся тел относятся: угловые скорости $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ и угловые ускорения $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и другие.

Векторы $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ и $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ направлены по оси вращения по правилу правовинтовой схемы поступательного движения при реализации вращательного. Вектор $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ одновременно определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг оси. В технике угловую скорость часто выражают не в радианах в секунду, а частотой вращения $\mathbf{n}$, выраженной числом оборотов в минуту. Зависимость между $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{2\pi} n}{\mathbf{60}} = \frac{\boldsymbol{\pi} n}{\mathbf{30}} \approx \mathbf{0,1\ n}. \qquad (2.2)$$

После изучения кинематических характеристик движения тела в целом, следует перейти к изучению движения отдельных его точек – к определению скоростей и ускорений точек тела.

Задачи, относящиеся к вращательному движению твёрдого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три типа

1. Определение углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения тела.
2. Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела.
3. Задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому.

Плоскопараллельным движением твёрдого тела называется такое движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Понятие сложного движения тела аналогично понятию движения материальной точки. В ряде случаев движение материальной точки по отношению к неподвижной инерциальной системе отсчёта (ИСО) удобно рассматривать как сложное движение. Сложное движение материальной точки – это составное движение. Это такое движение, при котором точка одновременно учувствует в двух или нескольких движениях, рассматриваемых относительно различных ИСО.

В основе этого рассмотрения лежит классический закон сложения скоростей.

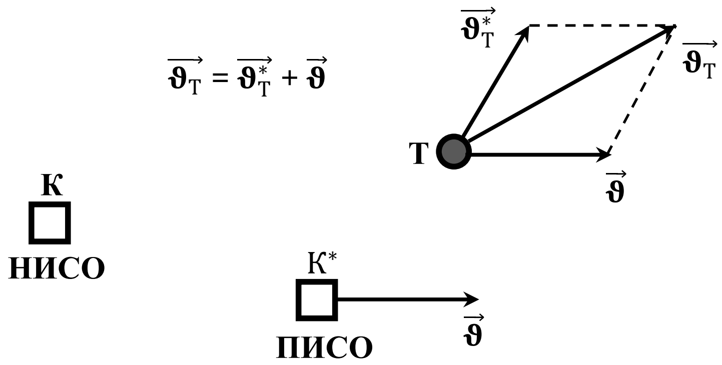


Рис. 4. Схема иллюстрации классического закона сложения скоростей

На схеме (рис. 4) обозначено:

- НИСО – неподвижная инерциальная система отсчёта, представленная телом отсчёта **К**;
- ПИСО – подвижная инерциальная система отсчёта, представленная телом отсчёта К* и движущейся со скоростью $\vec{\vartheta}$ относительно НИСО;
- **Т –** тело, движение которого рассматривается;
- $\vec{\vartheta}_T^*$ - скорость тела относительно ПИСО;
- $\vec{\vartheta}_T$ - скорость тела относительно НИСО.

Классический закон сложения скоростей может иметь редакцию: «Скорость тела относительно неподвижной инерциальной системы отсчёта $\vec{\vartheta}$ равна векторной сумме $\vec{\vartheta}_T^*$, скорости тела относительно подвижной инерциальной системы отсчёта, и скорости $\vec{\vartheta}$, движущейся системы отсчёта относительно неподвижной инерциальной системы отсчёта».

$$\vec{\vartheta}_T = \vec{\vartheta}_T^* + \vec{\vartheta} \qquad (2.3)$$

В кинематике принято называть: $\vec{\vartheta}_T$ – абсолютной скоростью, $\vec{\vartheta}_T^*$ - относительной скоростью и $\vec{\vartheta}$ – скоростью переноса.

Примеры решения задания.

Рассмотрим первый пример решения задания, условия которого показаны на рис. 5.

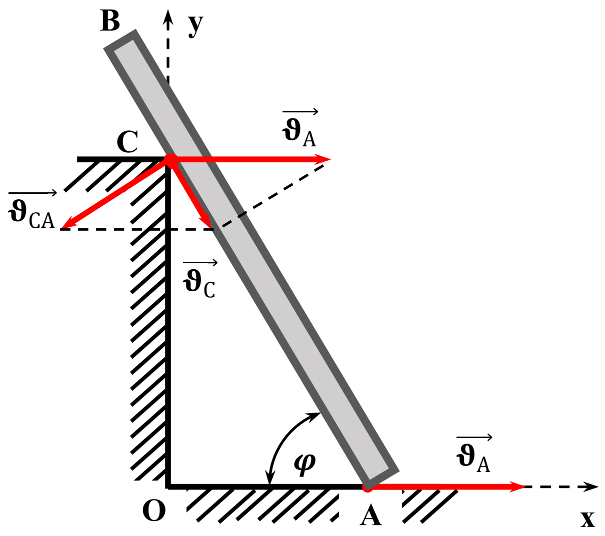


Рис. 5. Стержень, прислонённый к стене

Задание. Стержень, прислонённый к стене, движется в плоскости **x0y** так, что его нижний конец **A** скользит по оси **0x**, а сам стержень касается вертикальной стены **OC**.

Для момента, когда ось стержня **AB** наклонена к оси **0x** под углом $\boldsymbol{\varphi} = 60^{\circ}$ и скорости нижнего конца стержня $\overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta}_A} = 4$ м/с, определите скорость той точки стержня **C**, в которой он касается стены, а также угловую скорость вращения стержня **ω**. Высота стены **OC** равна 2 м.

Решение. В этой задаче принимаем точку **C**, принадлежащую стене **OC**, в качестве неподвижной инерциальной системы отсчёта. Точку **A**, принадлежащую стержню AB, будем считать подвижной инерциальной системой отсчёта, движущейся со скоростью $\overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta}_A}$.

Тогда, в соответствии с классическим законом сложения скоростей, имеем:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta}_C} = \overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta}_A} + \overrightarrow{\boldsymbol{\vartheta}_{CA}} \qquad (2.4)$$

Графическое решение векторного равенства (2.4) показано на рис. 5. Алгебраическое решение этого равенства может быть следующим.

$\boldsymbol{\vartheta}_C = \boldsymbol{\vartheta}_A \cdot \cos\boldsymbol{\varphi}, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_C = 4 \cdot 0,5 = 2$ (м/с),

$\boldsymbol{\vartheta}_{CA} = \boldsymbol{\vartheta}_A \cdot \sin\boldsymbol{\varphi}, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_{CA} = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (м/с),

$\boldsymbol{\vartheta}_{CA} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AC}, \qquad \mathbf{AC} = \dfrac{\mathrm{OC}}{\sin\boldsymbol{\varphi}}, \qquad \mathbf{AC} = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ (м),

$\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\boldsymbol{\vartheta}_{CA}}{\mathrm{AC}}, \qquad \boldsymbol{\omega} = 1,5$ (р/с).

Ответ: $\boldsymbol{\vartheta}_C = 2$ м/с, $\boldsymbol{\omega} = 1,5$ рад /с.

Рассмотрим второй пример решения задания, условия которого показаны на рис. 6.

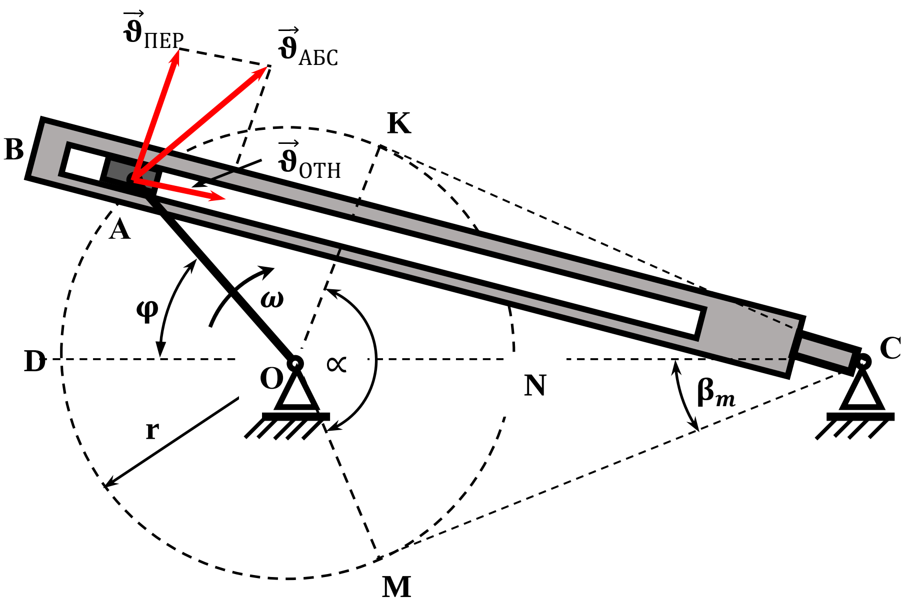


Рис. 6. Схема кривошипно-кулисного механизма строгального станка

Задание. В кривошипно-кулисном механизме строгального станка кривошип **ОА**, имеющий длину **r** = 0, 5 м, вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ = 10 рад/с. Ползун **А**, соединённый шарнирно с кривошипом и скользящий в прорези кулисы **ВС**, сообщает ей колебательно-вращательное движение с центром вращения в точке **С**. Амплитуда углового перемещения кулисы $\boldsymbol{\beta_m}$ = 30°. Мгновенное положение кулисы в пространстве задаётся значением угла **β**, отсчитанный от оси **CD**. Если угол **β** отсчитывается против направления движения часовой стрелки, то его значение считается положительным. Если угол **β** отсчитывается по направлению движения часовой стрелки, то его значение считается отрицательным.

Определите скорости ползуна **А** (абсолютную, относительную и переноса) в момент времени, когда угол **φ** = 45°, а угловое отклонение кулисы от оси **CD**, $\boldsymbol{\beta} = -15°$.

Определите время перемещения кулисы из точки **М** в точку **К** и время перемещения кулисы из точки **К** в точку и **М**.

Решение.

1) Найдём скорость $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{АБС}$ ползуна **А.**

Абсолютным движением ползуна **А** будет его движение относительно неподвижной станины **ОС** строгального станка. Этим движением, очевидно, является вращательное движение точки **А** вокруг центра вращения **О**. Модуль этой скорости можно найти по формуле

$\boldsymbol{\vartheta}_{АБС} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ (2.5)

Подставляя в выражение (2.5) известные величины получаем:

$\boldsymbol{\vartheta}_{\text{АБС}} = 10 \cdot 0,5 = 5$ (м/с)

Направление этой (окружной) скорости перпендикулярно кривошипу **ОА**.

2) Найдём скорости $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ОТН}}$ и $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ПЕР}}$ ползуна **А** в момент времени, когда угол $\boldsymbol{\varphi} = 45°$, а угловое перемещение кулисы, отсчитанное от оси **CD**, $\boldsymbol{\beta} = -15°$.

Одновременно точка **А** движется вдоль кулисы **ВС**, которая совершает колебательно-вращательное движение с центром вращения в точке **С**. Следовательно, абсолютную $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{АБС}}$ скорость ползуна **А** можно разложить на две составляющие: $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ОТН}}$, относительную скорость, описывающую движение ползуна **А** вдоль кулисы **ВС** и $\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ПЕР}}$, переносную, описывающую вращение ползуна **А** вокруг точки **С** (рис. 5).

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{АБС}} = \vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ОТН}} + \vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ПЕР}} \qquad (2.6)$$

Из выражения (2.5) следуют векторные равенства:

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ОТН}} = \vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{АБС}} - \vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ПЕР}} \qquad (2.7)$$

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ПЕР}} = \vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{АБС}} - \vec{\boldsymbol{\vartheta}}_{\text{ОТН}} \qquad (2.8)$$

Решение векторных равенств (2.7) и (2.8) можно выполнить графически и аналитически. Схема графического решения показана на рис. 5. Из схемы графического решения следует, что аналитическое решение можно выполнить следующим образом:

$\boldsymbol{\vartheta}_{\text{ОТН}} = \boldsymbol{\vartheta}_{\text{АБС}} \cdot \sin 15^{\circ}$ или $\boldsymbol{\vartheta}_{\text{ОТН}} = 5 \cdot 0,2588 \approx 1,3$ (м/с),

$\boldsymbol{\vartheta}_{\text{ПЕР}} = \boldsymbol{\vartheta}_{\text{АБС}} \cdot \cos 15^{\circ}$ или $\boldsymbol{\vartheta}_{\text{ПЕР}} = 5 \cdot 0,9659 \approx 4,8$ (м/с),

3) Определим время перемещения кулисы из точки **М** в точку **К** и время перемещения кулисы из точки **К** в точку и **М**.

Время перемещения кулисы из точки **М** в точку **К** совпадает со временем движения ползуна **А** из точки **М** в точку **К**. При этом ползун **А** проходит путь, равный 2/3 длины окружности, то есть 2, 1 м. При скорости равной 5 м/с время движения ползуна **А** из точки **М** в точку **К** будет 0, 4 с.

Время перемещения кулисы из точки **К** в точку и **М** будет в два раза меньше, то есть 0, 2 с. При этом ползун **А** проходит путь, равный 1/3 длины окружности, то есть в два раза меньший.

Ответ:

$\boldsymbol{\vartheta}_{\text{АБС}} = 5$ м/с, $\boldsymbol{\vartheta}_{\text{ОТН}} \approx 1,3$ м/с, $\boldsymbol{\vartheta}_{\text{ПЕР}} \approx 4,8$ м/с, $\mathbf{t}_{\text{МК}} = 0,4$ с, $\mathbf{t}_{\text{КМ}} = 0,2$ с.

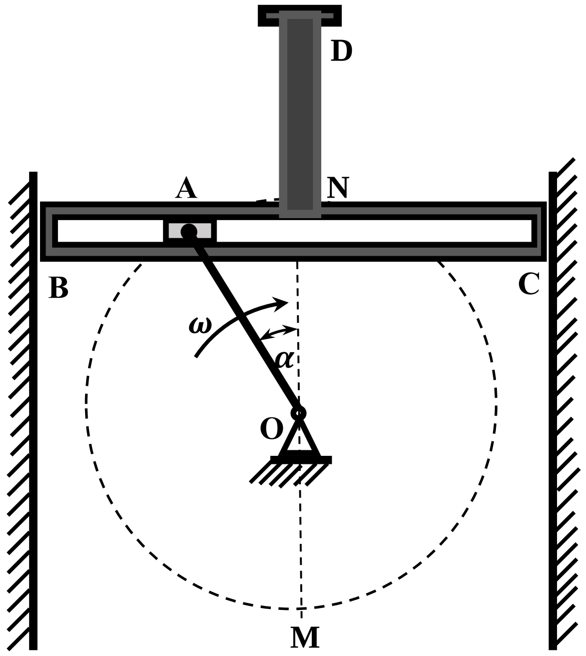
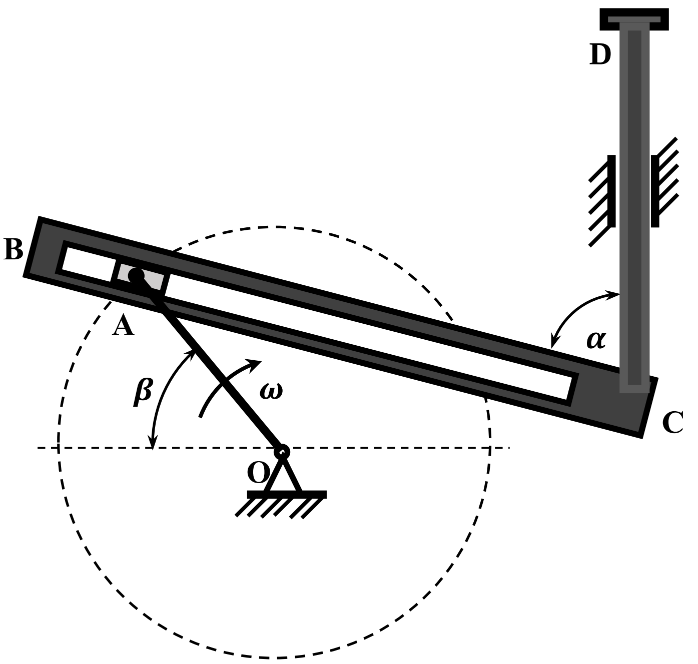
Расчётно-графическое задание № 3. Определение кинематических характеристик плоскопараллельного сложного движения твёрдого тела

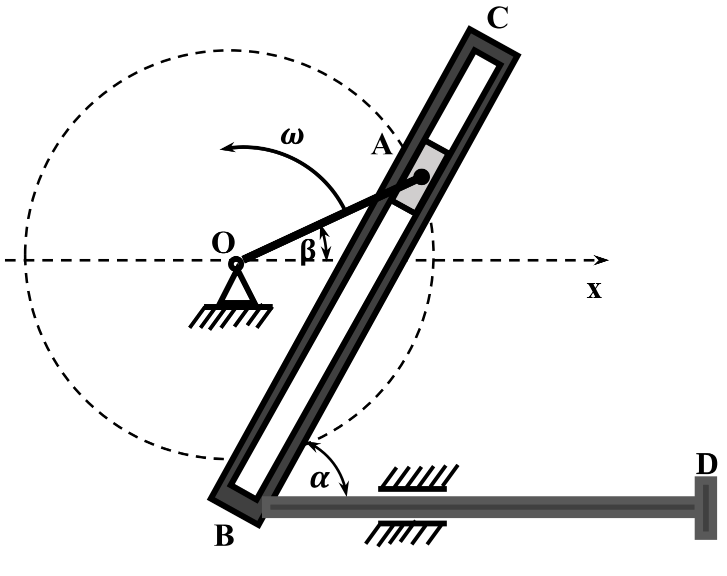
Расчётно-графическое задание уровня сложности А

По данным табл. 2. 1, в соответствии с вариантом контрольной работы, определите абсолютную, относительную и переносную скорости ползуна **А** и других точек в кривошипно-кулисном механизме в моменты, определяемые условиями задач.

Таблица 2. 1

Варианты исходных данных к задачам уровня сложности А

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1 ÷ 10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>В кривошипно-кулисном механизме кривошип ОА вращается с постоянной угловой скоростью ω = 2 рад /с. Ползун А, соединённый шарнирно с кривошипом и скользящий в прорези кулисы ВС, сообщает ей возвратно-поступательное движение. Определить скорость кулисы ВС при $\boldsymbol{\alpha} = 30°$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 11 ÷ 20</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ползун А, соединённый шарнирно с кривошипом и скользящий в прорези угловой кулисе ВСD, сообщает ей возвратно-поступательное движение. Определите скорость точки D углового рычага и скорость ползуна А относительно рычага ВСD при: $\boldsymbol{\beta} = 45°$, $\boldsymbol{\alpha} = 75°$, длина кривошипа ОА равна 40 см, угловая скорость вращения кривошипа ОА ω = 5 рад /с.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 21 ÷ 30</td></tr>
</table>



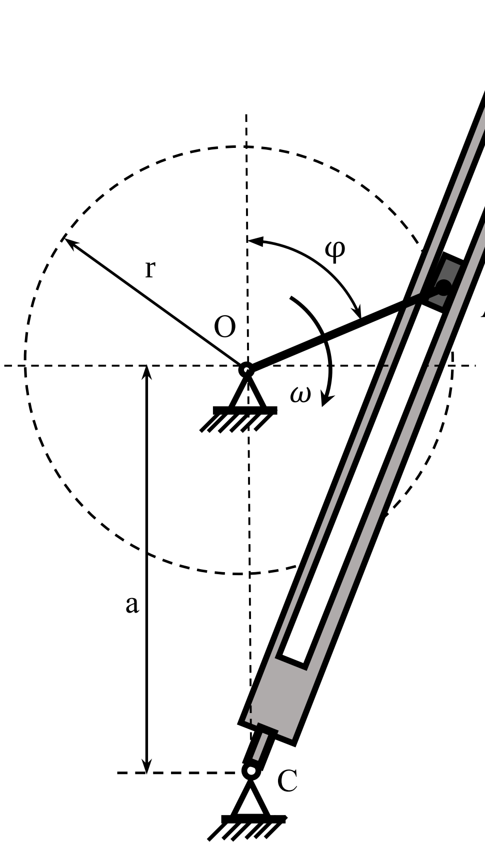
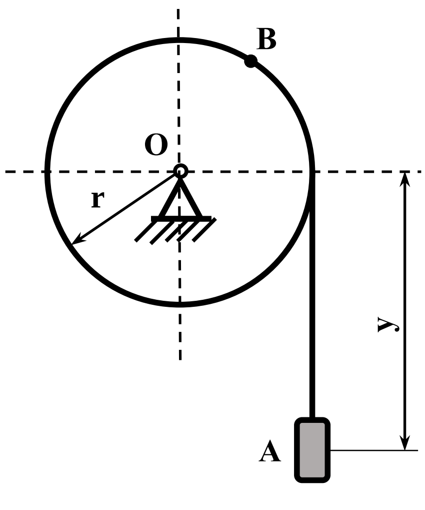
В кривошипно-кулисном механизме кривошип **OA** вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = 10\boldsymbol{\pi}$ рад /с вокруг оси **O**. Ползун **A**, соединённый шарнирно с кривошипом и скользящий в прорези наклонной угловой кулисе **CBD**, сообщает ей возвратно-поступательное движение. Определить модули абсолютной, относительной и переносной скоростей ползуна **A** в момент, когда кривошип **OA** составляет с осью **0x** угол $\boldsymbol{\beta} = 40°$.

Расчётно-графическое задание уровня сложности B, C

По данным табл. 2. 2 и табл. 2. 3, в соответствии с вариантом контрольной работы, определите скорость, ускорение и угловую скорость тел, заданных условиями задач.

Таблица 2. 2

Варианты заданий

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1 ÷ 10</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Определите угловую скорость кулисы BC в моменты времени:
$\mathbf{t_1}$ = 1 с и $\mathbf{t_2}$ = 3, 5 с для исходных данных, представленных в
таблице 2. 3.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 11 ÷ 20</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Движение груза A, опускающегося с помощью лебёдки, задано уравнением $\mathbf{y} = \mathbf{at^2} + \mathbf{bt} + \mathbf{c}$, где a, b, c – измеряется в метрах,
t – в секундах. Определите скорость и ускорение груза A в моменты времени $\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t_2}$, а также окружную скорость и тангенциальное ускорение точки B на ободе шкива для исходных данных, представленных в
таблице 2. 3.</td></tr>
</table>

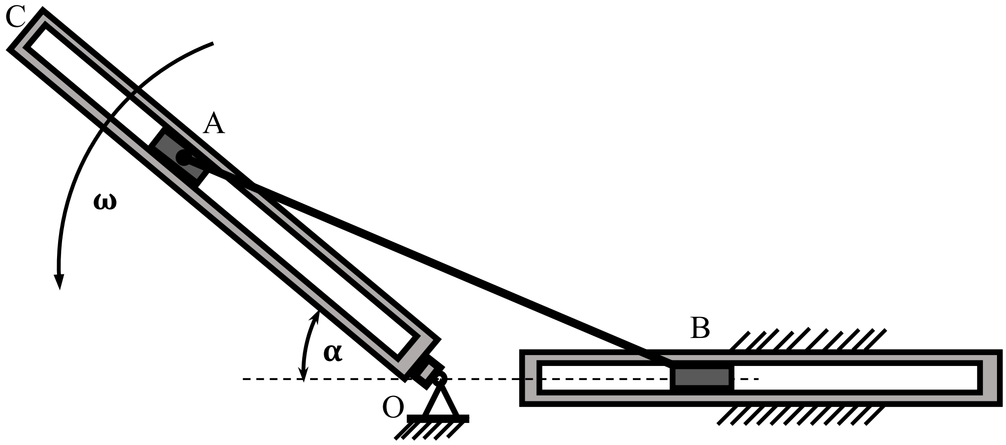
Вариант 21 ÷ 30
 Ползуны **A** и **B**, соединённые шарнирно стержнем, перемещаются по прямолинейным направляющим. Ползун **A** движется по закону **OA**= a · sin $\boldsymbol{\omega t}$, где a – в м, $\boldsymbol{\omega}$ – в рад /с, $\mathbf{t}$ – в с. Определите положение мгновенного центра скоростей **P** и угловую скорость стержня для моментов времени $\mathbf{t}_1 = \pi$ с и $\mathbf{t}_2$ = 4 с для исходных данных, представленных в таблице 2. 3.

Таблица 2. 3

Варианты исходных данных к задачам уровня сложности B, C

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a, м	0, 6	0. 6	0, 4	0, 4	0, 6	0, 6	0, 4	0, 4	0, 6	0,4
r/ $\boldsymbol{a}$	4/ 3	3/ 2	1/ 2	1/ 2	1/ 2	1/ 2	1/ 1	1/ 3	3/ 4	4/ 3
$\boldsymbol{\varphi}$, град	0	150	120	135	240	270	180	60	90	60
$\boldsymbol{\omega}$, р / с	8	5	4	2	8	2	8	8	6	2
Вариант 11 ÷ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a, м/ c^2	2	0	3	0	3	3	2	0	4	0
b, м/ с	0	3	4	2	0	4	0	3	4	2
c, м	3	4	0	5	2	0	4	2	0	3
r, м	0, 5	0, 8	0, 8	0, 8	0, 5	0, 5	0, 4	0, 6	0, 8	0, 5
$\mathbf{t}_1$, с	1, 5	1	1, 5	2	1, 5	1	1, 5	1	1, 5	1
$\mathbf{t}_2$, с	3	2, 5	3	4	4	3, 5	3	2, 5	4	3, 5

Вариант 21 ÷ 30										
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
АВ, м	1, 5	2	2, 4	3	3, 3	4, 2	2, 4	3, 6	3	2, 4
а, м	0, 5	0, 4	0, 6	0, 8	1, 5	2	1	1, 5	1, 2	1
α, град	30	45	60	30	45	60	30	45	60	30
ω, р / с	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4

III. Расчётно-графические работы по разделу «Динамика»

Тема 1. Определение сил, действующих на движущуюся материальную точку, методом дифференцирования функций, описывающих закон движения

Динамикой называется раздел теоретической механики, изучающий зависимость механического движения тела от действующих на него сил.

В разделе «Динамика» в основе выполнения самостоятельных и контрольных работ рассматриваются два способа нахождения сил, действующих на движущуюся материальную точку:

- методом дифференцирования функций, описывающих закон движения материальной точки или всего твёрдого тела и;

- методом определения кинетостатическое равновесия не только каждой точки, но и всей системы в целом.

Основные элементы теории определения сил, действующих на движущуюся материальную точку.

Множество частных задач динамики можно разбить на две основные группы, свести к двум основным задачам. Первая задача динамики. Известно движение данной материальной точки или данной системы. Требуется определить силы, действующие на данную материальную точку или данную систему. Вторая задача динамики (обратная первой). Известны силы, действующие на данную материальную точку или данную систему. Требуется определить движение этой материальной точки или этой системы.

Для решения этих задач в динамике пользуются как установленными в статике способами сложения сил и приведения их систем к простейшему виду, так и принятыми в кинематике характеристиками, и приёмами описанная различных движений. Однако для установления связи между движением материальных тел и факторами, определяющими его характер, этого оказывается недостаточно, и поэтому в динамике пользуются ещё рядом других физических понятий (масса, количество движения, работа, энергия и так далее).

Исходными данными решения первой задачи динамики является закон движения материальной точки или всего твёрдого тела. Если движение материальной точки задано в декартовой системе координат, то по данному закону движения

$$\begin{cases} x = x(\mathbf{t}), \\ y = y(\mathbf{t}), \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{t}) \end{cases} \qquad (3.1)$$

и массе материальной точки $\mathbf{m}$ находятся проекции силы, действующей на эту точку. Эта задача сводится к нахождению проекций ускорения, то есть к нахождению второй производной функций системы (3.1).

$$\begin{cases} \mathbf{F}_x = \mathbf{m} \cdot x'' \\ \mathbf{F}_y = \mathbf{m} \cdot y'', \\ \mathbf{F}_z = \mathbf{m} \cdot z''. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Модуль, силы действующей на материальную точку определяется по известной формуле

$$\mathbf{F} = \sqrt{\mathbf{F}_x^{\ 2} + \mathbf{F}_y^{\ 2} + \mathbf{F}_z^{\ 2}} \qquad (3.3)$$

а её направление определяется по значениям направляющих косинусов.

Основные элементы теории определения закона движения материальной точки, при действии на неё заданной силы.

Решение второй задачи динамики (обратной первой) сводится к двойному интегрированию выражения (3.2). Рассмотрим пример решения этой задачи.

Пример решения задания.

Задача. Материальная точка массой 2 кг движется по оси $\mathbf{0x}$ под действием силы, направленной вдоль этой оси и изменяющейся по закону
$\mathbf{F}\ (\mathbf{t}) = 3\mathbf{t}^2 - 2$. Найдите закон движения этой точки $x(\mathbf{t})$, если известно, что при $\mathbf{t_0}$ = 2 с скорость точки $\boldsymbol{\vartheta_0}$ равна 3 м/с, а координата $x_{\mathbf{0}}$ равна 1 м.

Решение. В соответствии со вторым законом Ньютона находим ускорение материальной точки

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{t}}, \text{ или } x'' = \frac{3}{2}\,\mathbf{t} - 1. \qquad (3.4)$$

Выражение (3.4) есть дифференциальное уравнение, интегрирование которого позволяет найти семейство первообразных, представляющих собой общее решение этого уравнения (3.5)

$$x' = \frac{3}{4}\ \mathbf{t}^2 - \mathbf{t} + C_1 \qquad (3.5).$$

Подставляя в (3.5) начальные условия: $\mathbf{t_0}$ = 2 с и $\boldsymbol{\vartheta_0}$ = 3 м/с, находим C_1= 2, и из выражения (3.5) получаем (3.6), представляющее собой частное решение дифференциального уравнения (3.4).

$$x'(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{t}) = \frac{3}{4}\ \mathbf{t}^2 - \mathbf{t} + 2 \qquad (3.6)$$

Таким образом скорость тела изменяется по закону (3.6). Выражение (3.6) есть дифференциальное уравнение, интегрирование которого позволяет найти семейство первообразных, представляющих собой общее решение этого уравнения (3.7)

$$x(\mathbf{t}) = \frac{1}{4}\ \mathbf{t}^3 - \frac{1}{2}\ \mathbf{t}^2 + 2\,\mathbf{t} + C_2 \qquad (3.7).$$

Подставляя в (3.7) начальные условия: $\mathbf{t_0}$ = 2 с и $x_{\mathbf{0}}$ = 1 м, находим C_2= - 3, и из выражения (3.7) получаем (3.8), представляющее собой частное решение дифференциального уравнения (3.6) - закон, по которому изменяется координата, движущийся материальной точки.

$$x(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{t}^3 - \frac{1}{2}\ \mathbf{t}^2 + 2\,\mathbf{t} - 2 \qquad (3.8).$$

Расчётно-графическое задание № 4. Определение сил, действующих на движущуюся материальную точку, методом дифференцирования функций, описывающих закон движения

По данным табл. 3. 1 и табл. 3. 2 в соответствии с вариантом контрольной работы, определите силу, действующую на материальную точку.

Таблица 3. 1

Варианты заданий

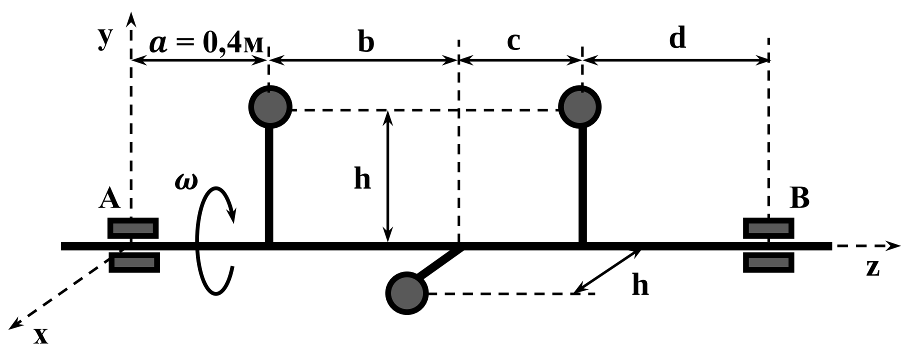
Вариант 1 ÷ 10
Движение материальной точки массой **m**, равной 1 кг задано уравнениями: $x(\mathbf{t}) = \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{t^2} + \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{c_1}$; $y(\mathbf{t}) = \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{t^2} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{c_2}$, где **x** и **y** – координаты точки, м; **t** – текущее время, с. Определите силу, действующую на материальную точку, для исходных данных, представленных в таблице 3. 2.
Вариант 11 ÷ 20
Материальная точка массой **m**, равной 0, 5 кг движется по окружности радиусом **r** по закону **s = (at + b)·t**, где **s** – длина дуги, м; **t** - текущее время, с. Определите действующую на материальную точку силу при $\boldsymbol{t_1}$ = 1 с, $\boldsymbol{t_2}$ = 1, 5 с, $\boldsymbol{t_3}$ = 6 с, для исходных данных, представленных в таблице 3. 2.
Вариант 21 ÷ 30
 Невесомая ось, на которой укреплены три груза массами $\boldsymbol{m_1}$ = 0, 2 кг, $\boldsymbol{m_2}$ = 0, 4 кг, $\boldsymbol{m_3}$ = 0, 2 кг, вращается вокруг оси **z** со скоростью **ω**. Определите реакции подшипников для исходных данных, представленных на рисунке ($\boldsymbol{a}$ = 0, 4 м) и в таблице 3. 2.

Таблица 3. 2

Варианты исходных данных к задачам

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\mathbf{a_1}$, м/ $\mathbf{c}^2$	0	2	3	4	5	6	5	4	3	2
$\mathbf{a_2}$, м/ $\mathbf{c}^2$	3	0	4	3	2	3	4	0	5	3
$\mathbf{b_1}$,	5	3	0	2	4	6	2	3	4	0

м/ с										
$\mathbf{b_2}$, м/ с	3	5	2	0	6	4	0	3	5	2
$\mathbf{c_1}$, м	5	8	6	2	0	8	9	7	0	8
$\mathbf{c_2}$, м	8	9	6	7	4	0	5	6	7	5
Вариант 11 $\div$ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a, м/ $\mathbf{c}^2$	4	5	6	7	5	4	3	2	3	4
b, м/ с	0, 3	0, 2	0, 5	0, 8	0, 4	0, 6	0, 8	0, 6	0, 4	0, 6
r, м	0, 5	0, 4	0, 3	0, 3	0, 5	0, 4	0, 3	0, 2	0, 3	0, 4
Вариант 21 $\div$ 30										
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$\boldsymbol{\omega}$, р / с	1600	1500	2500	2200	3000	1800	2200	2400	1700	1900
b/ $\boldsymbol{a}$	1, 4	1, 5	1, 6	1, 2	0, 8	0, 6	0, 4	0, 5	0, 5	0, 7
c/ $\boldsymbol{a}$	0, 6	0, 8	0, 4	0, 5	1, 2	1, 6	1, 5	1, 4	1, 2	1, 3
d/ $\boldsymbol{a}$	0, 2	0, 5	0, 4	0, 6	0, 8	0, 9	1, 2	0, 2	1, 3	1, 5

Тема 2. Кинетостатическое равновесие твёрдого тела

Основные элементы теории определения кинетостатического равновесия твёрдого тела.

Одним из важных методом решения задач динамики механического движения твёрдого тела является применение принципа **Ж. Даламбера**. Согласно этому принципу, в каждый момент времени все силы, действующие на материальную точку, уравновешиваются силой инерции. Сила инерции материальной точки $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{и}}}$ называется произведение массы этой точки на её ускорение, взятое с обратным знаком.

$\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{и}}} = -\,\mathbf{m} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$ (3.9)

Сила инерции $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{и}}}$ движущейся материальной точки всегда направлена в сторону, противоположную направлению ускорения. Сила инерции $\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\text{и}}}$, как и любая сила, вызывает ускорение $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{\text{и}}}$, которое называется ускорением инерции.

$\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{и}}} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{a}_{\text{и}}}.$ (3.10)

Очевидно, что $\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{\text{и}}} = -\,\vec{\boldsymbol{a}}$.

Принцип Даламбера позволяет задачи динамики решать, как статические. Добавив к действующим силам силу инерции, можно применять все теоремы, законы и правила, доказанные и принятые в статике. Радел, связанный с этим принципом, получил название «Кинетостатика» (что означает статика в движении). В механической системе материальных точек, связанных между собой, можно рассматривать кинетостатическое равновесие не только каждой точки, но и всей системы в целом и в любой её части.

Следует помнить, что только при решении задач методом кинетостатики необходимо учитывать силы инерции.

Методические указания к решению задач кинетостатического равновесия системы материальных точек.

При решении задач методом кинетостатики необходимо придерживаться следующего порядка:

1. Выбрать объект рассмотрения принять его за материальную точку (систему материальных точек) и изобразить её в текущий момент времени. Выбрать направление ускорения.
2. Приложить все активные (заданные) силы, действующие на точку.
3. Освободить точку от связей, заменив их действия реакциями.
4. Приложить силы инерции.
5. Составить уравнения кинетостатического равновесия.
6. Решить полученные уравнения, число которых должно быть равно числу неизвестных величин, входящих в уравнения.

Пример решения задания. Рассмотрим пример решения задания, условия которого показаны на рис. 7.

Задание. Тело **А**, массой **m** = 50 г, подвешено на нити длиной **l** = 60 см, закреплённой в неподвижной точке **В**. Телу сообщается равномерное движение по окружности в горизонтальной плоскости, при котором нить составляет с вертикалью угол **α** = 30°. Определите силу натяжения нити **T**, окружную и угловую скорости движения этого конического маятника.

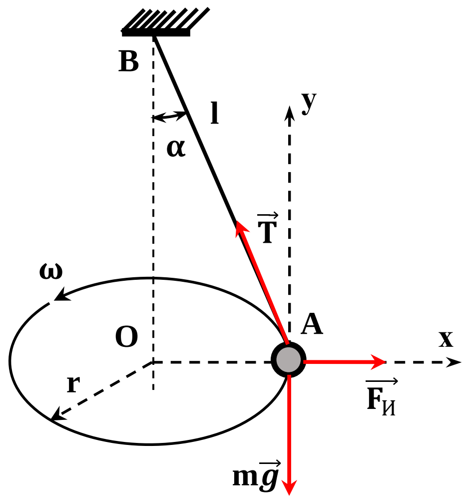


Рис. 7. Схема движения конического маятника

Решение. Тело **A** принимаем за материальную точку. Прикладываем к телу действующие на него силы: силу тяжести $\mathbf{m}\vec{g}$ и силу натяжения нити $\vec{\mathbf{T}}$. Условно прикладываем к телу его центробежную силу инерции $\vec{\mathbf{F}}_{И}$. Тело **A** во вращающемся треугольнике **OAB** будет находиться в состоянии покоя.
Составляем векторное уравнение кинетостатического равновесия.

$\vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{F}}_{И} + \mathbf{m}\vec{\mathbf{g}} = 0$ (3.11).

Решение кинетостатического уравнения равновесия (3.11) можно выполнить графически, построив в масштабе замкнутый силовой треугольник.

Рассмотрим решение этого уравнения алгебраическим методом.
Строим декартовую систему координат **xAy** как показано на рис. 7.
Проектируем векторное равенство (3.11) на оси декартовой системы координат:

$$\begin{cases} -\mathrm{T} \cdot \sin\alpha + \mathbf{F}_{И} = 0, \text{ось Ax}, \\ \mathrm{T} \cdot \cos\alpha - \mathbf{m}\,\mathbf{g} = 0, \text{ось } \mathbf{A}\text{y}. \end{cases} \quad (3.12).$$

Получили систему уравнений, где $\mathbf{F}_{И} = \mathbf{m}\dfrac{\vartheta^2}{r}$ или $\mathbf{F}_{И} = \mathbf{m}\dfrac{\vartheta^2}{\mathbf{l}\cdot\sin\alpha}$. (3.13).

Решая эту систему, находим:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{mg}}{\cos\alpha}, \ \mathbf{T} = \frac{0{,}05 \cdot 9{,}8}{0{,}866} = 0{,}566 \text{ (Н)},$$

$$\mathbf{F}_{И} = mg \cdot \tan\alpha, \ \mathbf{F}_{И} = 0{,}05 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}577 = 0{,}283 \text{ (Н)},$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\mathbf{F}_{И}\cdot \mathbf{l}\cdot\sin\alpha}{m}}, \ \vartheta = \sqrt{\frac{0{,}283\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5}{0{,}05}} = 1{,}3 \text{ (м/с)}.$$

$$\omega = \frac{\vartheta}{\mathbf{l}\cdot\sin\alpha}, \quad \omega = \frac{1{,}3}{0{,}6\cdot 0{,}5} = 4{,}3 \text{ (р/с)}.$$

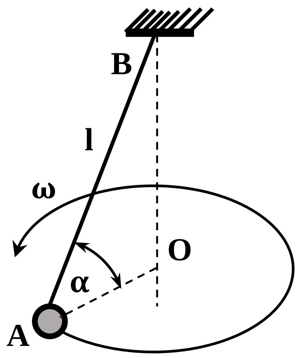
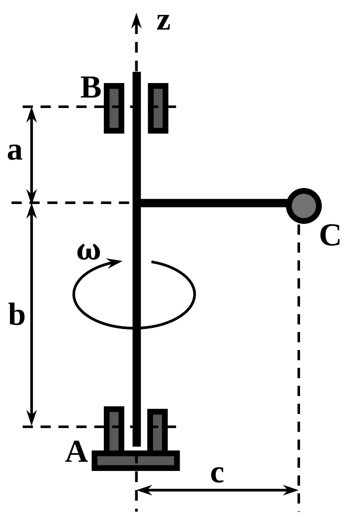
Ответ: **T** = 0,566 Н, **ϑ** =1,3 м/с, **ω** = 4,3 р/с.

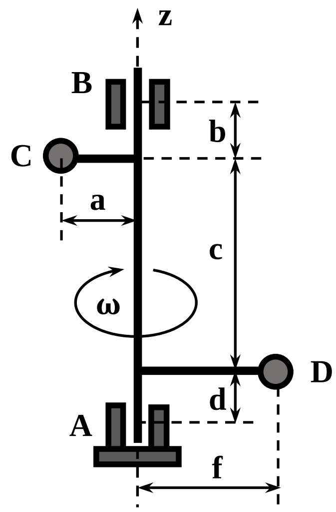
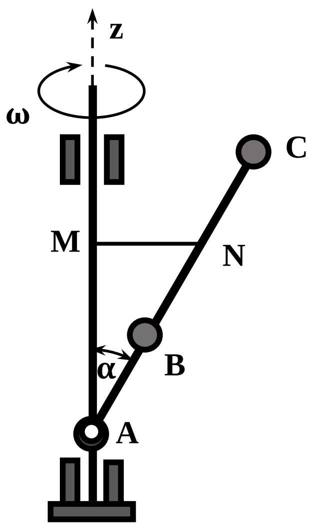
Расчётно-графическое задание № 5. Определение сил, действующих на материальную точку и параметров её движения, методом определения кинетостатического равновесия

По данным табл. 3. 3 в соответствии с вариантом контрольной работы, определите силы реакций опор и подвес, а также окружную и угловую скорости вращения тел, заданных условиями задач.

Таблица 3. 3

Варианты заданий

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1 ÷ 7</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Тело A, массой m = 2 кг, на нити, AB, длиной l = 0, 3 м, равномерно вращается в горизонтальной плоскости. Определите силу натяжения нити $\vec{\mathbf{T}}$, окружную и угловую скорости тела, если угол α, между плоскость вращения и нитью, равен 30°.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 8 ÷ 14</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Тело C, массой m = 10 кг, укреплённый на невесомом валу, вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω, равной 20 рад /с. Определите реакции подпятника A и подшипника B для условий:
a = 0, 25 м; b = 0, 75 м; c = 0, 5 м.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант 15 ÷ 21</td></tr>
</table>

	На невесомом валу **AB** укреплены два одинаковых точечных тела **C** и **D** массой **m**. Вал вращается вокруг вертикальной оси **z** с постоянной угловой скоростью, определяемой выражением $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{g \,/\, \mathbf{h}}$, где **g** – ускорение силы тяжести, **h** – некоторая постоянная величина. Определите реакции подпятника **A** и подшипника **B**, для условий: **a** = **h**; **b** = **h**; **c** = 2 **h**; **d** = **h**; **f** = 1, 5 **h**.
Вариант 22 ÷ 30	
	К валу, равномерно вращающемуся вокруг вертикальной оси **z** с угловой скоростью **ω**, равной 40 рад /с, прикреплён с помощью шарнира **A** и нити **MN** невесомый стержень **AC**, на котором закреплены два одинаковых точечных груза **B** и **C** массой **m** = 1 кг. Определите силу натяжения нити, если **AB** = **BN** = **NC** = 1 м и угол **α** равен 30°.

IV. Расчётно-графические работы по разделу

«Сопротивление материалов»

Тема 1. Растяжение и сжатие

Основные элементы теории и методические указания к решению задач на растяжение и сжатие.

В этой теме рассматриваются простые случаи воздействия сил на стержень. При проработки этой темы необходимо изучить:

- график зависимости механического нормального напряжения от относительного удлинения материала и её характерные точки;
- порядок построения эпюр продольных сил и механических напряжений в поперечных сечениях бруса;
- порядок построения эпюр перемещений поперечных сечений бруса;
- порядок расчёта на прочность при растяжении и сжатии бруса и виды расчётов.

Необходимо обратить внимание на то, что механические характеристики материала находят путём деления соответствующей нагрузки на первоначальную площадь поперечного сечения. В связи с этим и напряжения являются расчётными, а не истинными.

Надёжная работа конструкций обеспечивается выполнением условия прочности

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}} \leq [\boldsymbol{\sigma}],$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}}$ – наибольшее нормальное напряжение, возникающее в рассчитываемом элементе при рабочей нагрузке, $[\boldsymbol{\sigma}]$ – допускаемое нормальное напряжение, то есть напряжение, при котором обеспечивается надёжная работа конструкции.

Допускаемое нормальное напряжение равно предельному, делённому на нормативный коэффициент запаса прочности

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma}_{\text{пред}}/[\boldsymbol{n}],$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{\text{пред}}$ – предельное (опасное) механическое напряжение, при котором в материале появляются признаки разрушения или заметные остаточные деформации, $[\boldsymbol{n}]$ – нормативный (допускаемый) коэффициент запаса прочности.

Как правило, за опасные напряжения при статических нагрузках принимают: для пластических материалов - $\boldsymbol{\sigma}_{\text{т}}$ (предел текучести материала), для хрупких материалов - $\boldsymbol{\sigma}_{\text{проч}}$ (предел прочности материала).

При статической нагрузке коэффициент запаса прочности принимают: для пластичных материалов, например, сталей: $1,4 < [\boldsymbol{n}] < 2,5$, для хрупких материалов: $2,5 < [\boldsymbol{n}] < 3$.

Так как хрупкие материалы неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию, то для них определяют два допускаемых напряжения (при растяжении $[\boldsymbol{\sigma}_{\text{р}}]$ и $[\boldsymbol{\sigma}_{\text{с}}]$):

$[\sigma_р] = \sigma_т\ /\ [n]$; $[\sigma_с] = \sigma_{проч}\ /\ [n]$.

Примеры решения задания.

Рассмотрим первый пример решения задания.

Пример 1. Построить эпюру продольных сил для бруса, изображённого на схеме (рис. 8, а) для условий: $\mathbf{F_1} = \mathbf{F}$, $\mathbf{F_2} = 2\mathbf{F}$, $\boldsymbol{F_3} = 4\mathbf{F}$.

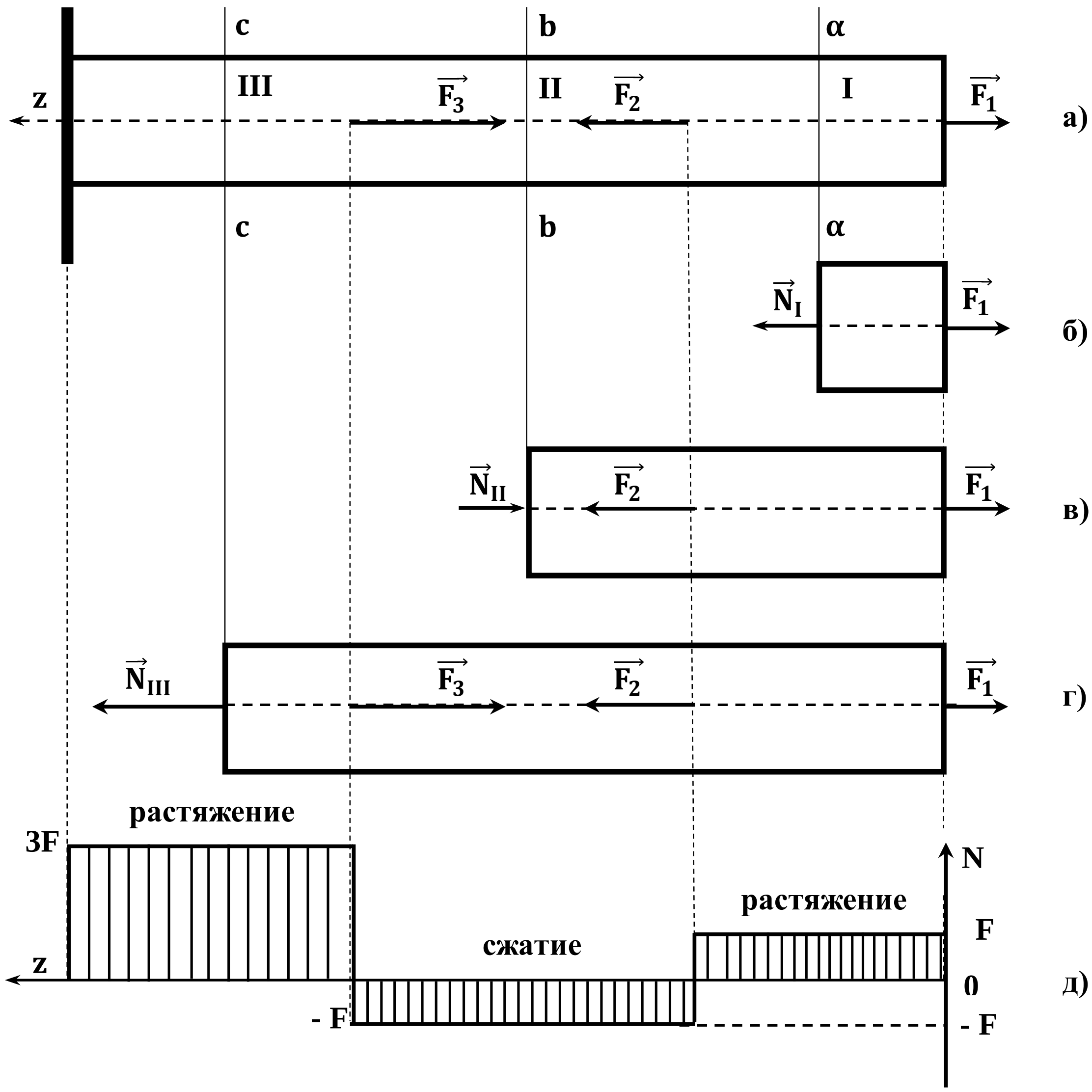


Рис. 8. Схема построения эпюры продольных сил

График зависимости значения величины продольной силы **N**, действующей в поперечном сечении бруса, от координаты **z** этого сечения называется эпюрой продольных сил. Эпюра продольных сил показывает закон изменения продольной силы по длине бруса. Эпюру продольных сил строят в первую очередь для того, чтобы использовать её при расчёте бруса на прочность; она даёт возможность найти наибольшие значения продольных сил и положение сечений, в которых они возникают.

Решение.

Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы (рис. 8, а). В нашем примере получилось три участка: **I**, **II**, и **Ш**. Применяя метод сечений, оставляем правую и отбрасываем левую часть бруса: это позволит не определять реакцию заделки.

1) Проведя произвольное сечение $\boldsymbol{\alpha - \alpha}$ на участке **I**, составим для оставшейся части бруса (рис. 8, б) уравнение равновесия

$$\mathbf{0z}: \quad \overrightarrow{\mathbf{N_I}} + \overrightarrow{\mathbf{F_1}} = 0, \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{N_I}} = -\overrightarrow{\mathbf{F_1}}, \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{N_I}} = -\vec{\mathbf{F}}.$$

Следовательно, продольная сила $\overrightarrow{\mathbf{N_I}}$ на участке **I** направлена вдоль оси $\mathbf{0z}$ и равна **F**.

Очевидным является, что во всех поперечных сечениях данного участка сила одинакова. То же относится и ко всем остальным участкам, поэтому совершенно безразлично, где проводить сечение $\boldsymbol{\alpha - \alpha}$ в пределах того или иного рассматриваемого участка.

2) Проведя произвольное сечение $\mathbf{b - b}$ на участке **II**, составим для оставшейся части бруса (рис. 8, в) уравнение равновесия

$$\mathbf{0z}: \quad \overrightarrow{\mathbf{N_{II}}} + \overrightarrow{\mathbf{F_2}} + \overrightarrow{\mathbf{F_1}} = 0, \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{N_{II}}} = -\overrightarrow{\mathbf{F_2}} - \overrightarrow{\mathbf{F_1}}, \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{N_{II}}} = -2\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}, \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{N_{II}}} = -\vec{\mathbf{F}}.$$

Следовательно, продольная сила $\overrightarrow{\mathbf{N_{II}}}$ на участке **II** также направлена вдоль оси $\mathbf{0z}$ и равна **F**.

3) Аналогично определяем продольную силу $\overrightarrow{\mathbf{N_{III}}}$ в произвольном сечении **с – с** на участке **III**.

$$\overrightarrow{\mathbf{N_{III}}} = 3\vec{\mathbf{F}}.$$

Следовательно, продольная сила $\overrightarrow{\mathbf{N_{III}}}$ на участке **III** направлена вдоль оси $\mathbf{0z}$ и равна 3**F**. Очевидно, что сила $\overrightarrow{\mathbf{N_{III}}}$ равна силе реакции заделки бруса.

4) Для построения эпюры продольных сил **N** проводим графика $\mathbf{z}$ параллельно оси бруса (рис. 8, д). Величины продольных сил откладываем в выбранном масштабе от оси эпюры, при этом положительные значения сил **N** (растяжение) откладываем в верх, а отрицательные – вниз от оси.

В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получаются скачкообразные изменения ординат - «скачки». Размер «скачка» равен приложенной в соответствующем месте бруса внешней сосредоточенной силе. Эпюру принято штриховать; при этом штриховка перпендикулярна оси эпюры – каждая линия штриховки (ординат графика) даёт в принятом масштабе значение продольной силы в поперечном сечении бруса.

Рассмотрим второй пример решения задания.

Пример 2. Для бруса со ступенчато – переменным поперечным сечением (рис. 9, а) построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений для условий:

- силы $\mathbf{F_1}$ = 80 кН, $\mathbf{F_2}$ = 40 кН, $\mathbf{F_3}$ = 190 кН;

- площади поперечных сечений $\mathbf{S_1}$ = 5 см^2, $\mathbf{S_2}$ = 8 см^2, $\mathbf{S_3}$ = 10 см^2.

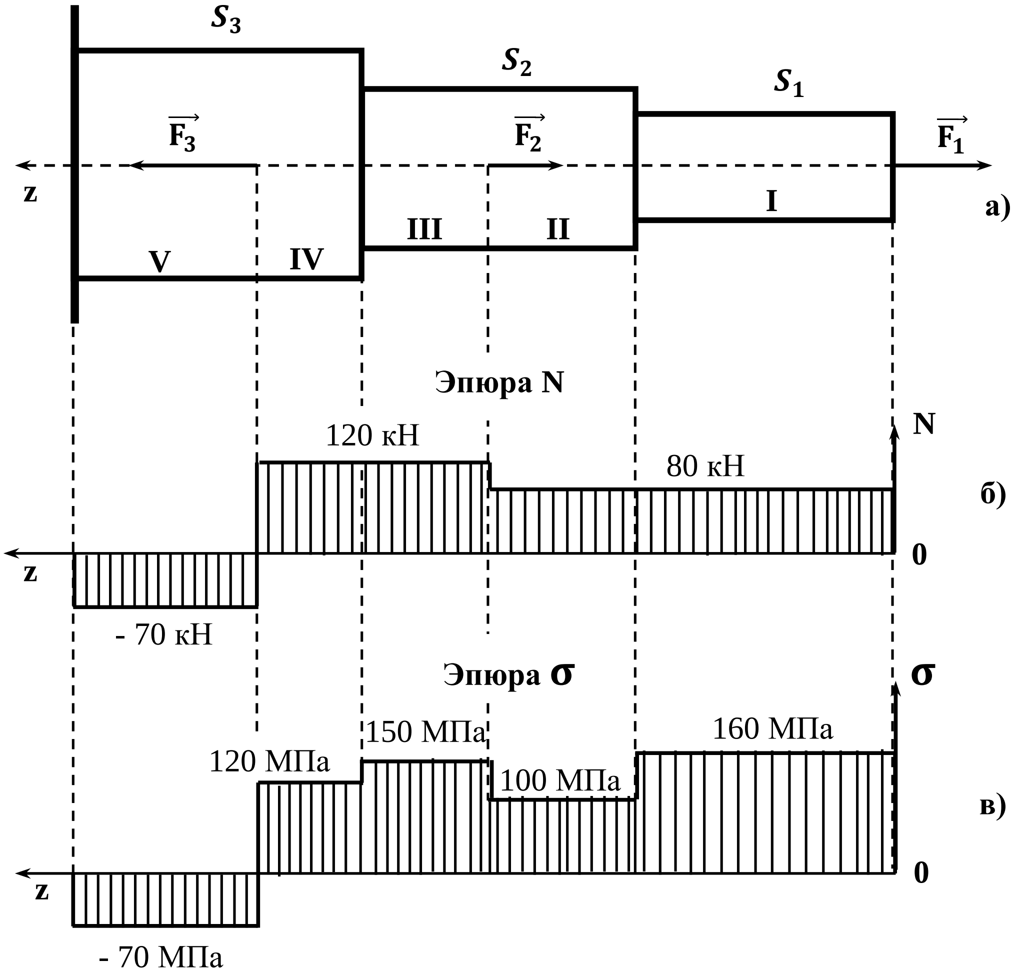


Рис. 9. Схема построения эпюр продольных сил нормальных напряжений

Решение.

Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы и изменения размеров поперечного сечения (рис. 9, а). В нашем примере получилось пять участков: **I**, **II**, **Ш**, **IV** и **V**. При построении только эпюры продольных сил следовало бы разбить брус лишь на три участка.

Применяя метод сечений, определяем продольные силы в поперечных сечениях бруса и строим соответствующую эпюру (рис. 9, б). Построение эпюры продольных сил $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{z})$ принципиально ничем не отличается от рассмотренного ранее примера, поэтому подробности этого построения опускаем.

Нормальные напряжения вычисляем по формуле

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{S}}, \qquad (4.1)$$

подставляя значения сил в ньютонах, а площадей – в квадратных метрах.

Для участка **I**

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{N_I}}{\mathbf{S_I}}, \ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{I}} = \frac{80 \cdot 10^3}{\mathbf{5} \cdot 10^{-4}} = 160 \cdot 10^6 = 160 \text{ (МПа)}.$$

Аналогично вычисляем для участков **II**, **Ш**, **IV** и **V**:
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{II}}$ = 100 МПа, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{III}}$ = 150 МПа, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{IV}}$ = 120 МПа, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{V}}$ = - 70 МПа.

В пределах каждого из участков напряжения постоянны, то есть эпюра на данном участке – прямая, параллельная оси абсцисс (бруса).

Для расчётов на прочность интерес представляют в первую очередь те сечения, в которых возникают наибольшие напряжения. Существенно, что в рассматриваемом случае они не совпадают с теми сечениями, где продольные силы максимальны. В тех случаях, когда сечение бруса по всей длине постоянно, эпюра нормальных напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}$ ($\mathbf{z}$) подобна эпюре продольных сил **N** = **N**($\mathbf{z}$) и отличается от неё только масштабом, поэтому, естественно, имеет смысл построение лишь одной из указанных эпюр.

Расчётно-графическое задание № 6. Определение внутренних продольных сил и нормальных напряжений при растяжении и сжатии

По данным табл. 4. 1 и исходных данных, представленных в табл. 4. 2, в соответствии с вариантом контрольной работы, постройте эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

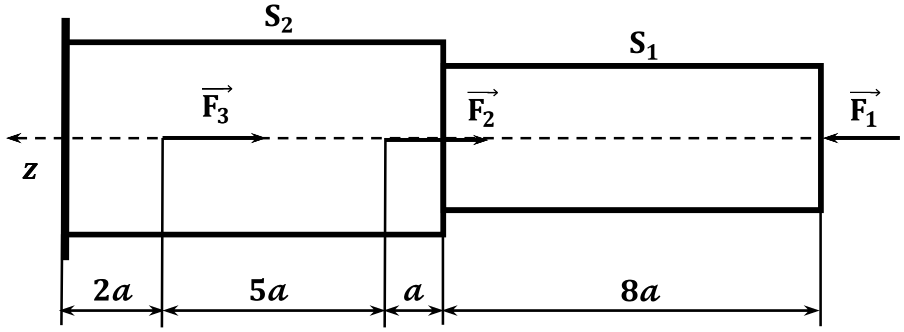
Известно, что:

- площади поперечных сечений бруса $\mathbf{S_1 = n_1 \cdot S}$, $\mathbf{S_2 = n_2 \cdot S}$, где $\mathbf{S}$ = 5 см^2;
- силы, действующие на брус $\mathbf{F}_1 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{F}$, $\boldsymbol{F}_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ = 80 кН.

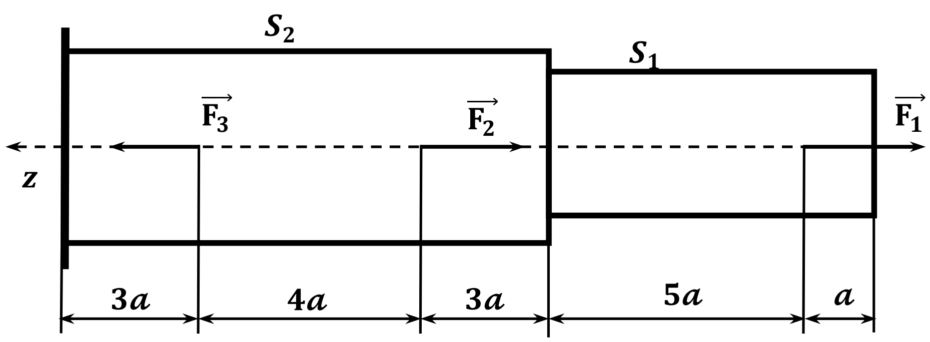
Таблица 4. 1

Схемы для заданий

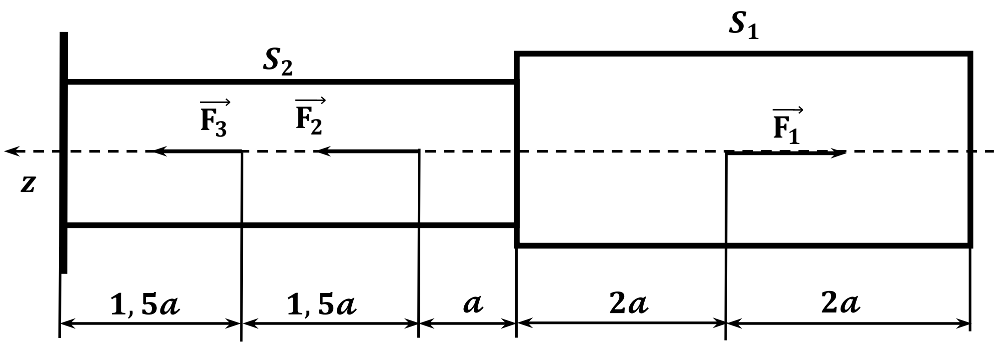
№ 1



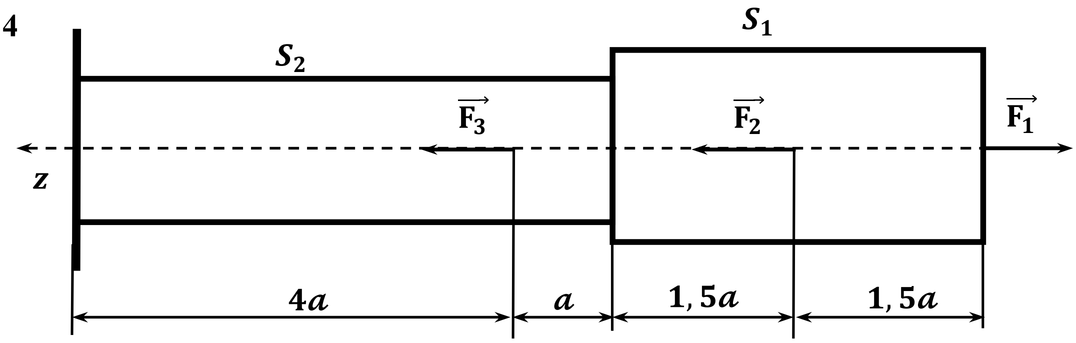
№ 2



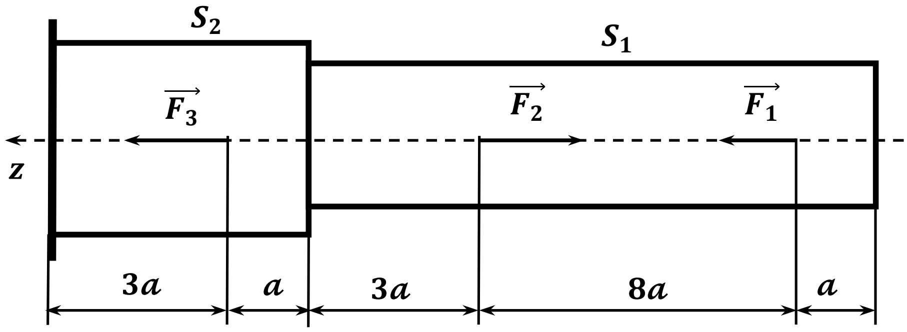
№ 3



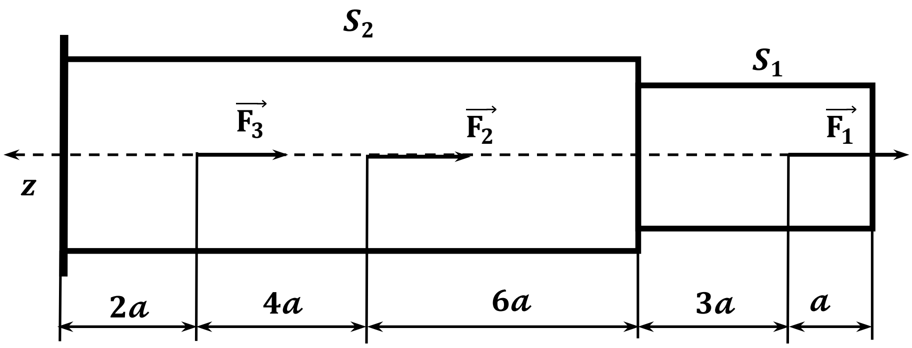
№ 4


S_1
S_2
$\overrightarrow{F_3}$
$\overrightarrow{F_2}$
$\overrightarrow{F_1}$
z
$4a$
a
$1,5a$
$1,5a$

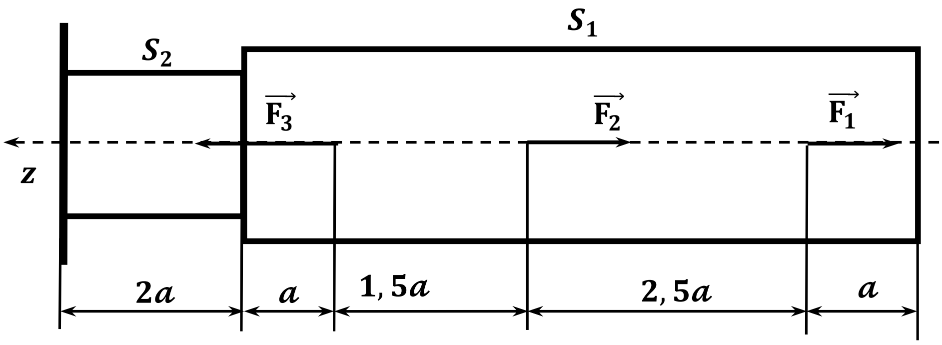
№ 5


S_2
S_1
$\overrightarrow{F_3}$
$\overrightarrow{F_2}$
$\overrightarrow{F_1}$
z
$3a$
a
$3a$
$8a$
a

№ 6


S_2
S_1
$\overrightarrow{F_3}$
$\overrightarrow{F_2}$
$\overrightarrow{F_1}$
z
$2a$
$4a$
$6a$
$3a$
a

№ 7


S_1
S_2
$\overrightarrow{F_3}$
$\overrightarrow{F_2}$
$\overrightarrow{F_1}$
z
$2a$
a
$1,5a$
$2,5a$
a

№ 8

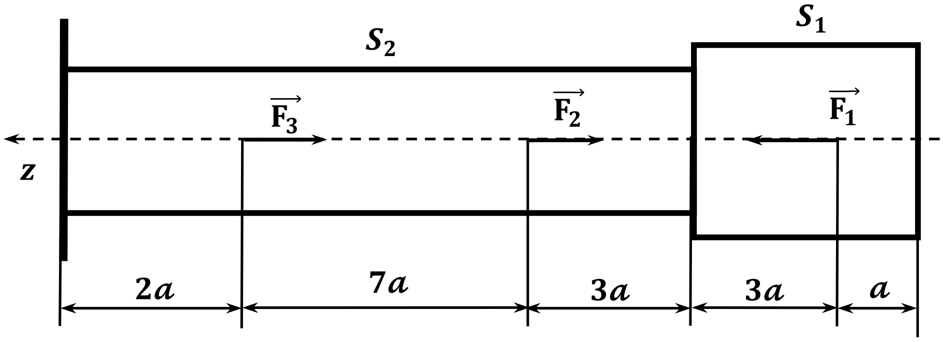

S_1
S_2
$\overrightarrow{F_3}$
$\overrightarrow{F_2}$
$\overrightarrow{F_1}$
z
$2a$
$7a$
$3a$
$3a$
a

Таблица 4. 2

Исходные данные расчёта

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Схема №	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
$\mathbf{n_1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1, 2	1, 3
$\mathbf{n_2}$	1, 5	1, 4	1, 3	1, 2	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1	1
$\mathbf{m_1}$	1	1	1	1	0, 6	0, 7	0, 8	0, 5	1, 7	1, 8
$\mathbf{m_2}$	1, 2	1, 3	1, 6	1, 5	1	1	1	1	0, 3	0, 4
$\mathbf{m_3}$	2, 2	2, 4	2, 1	2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1	1
Вариант 11 ÷ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Схема №	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
$\mathbf{n_1}$	1, 4	1, 5	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1	1	1	1
$\mathbf{n_2}$	1	1	1	1	1	1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5
$\mathbf{m_1}$	1, 9	2	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1	1	1	1
$\mathbf{m_2}$	0, 5	0, 6	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	1, 1	1, 2	1, 3	1. 4
$\mathbf{m_3}$	1	1	1	1	1	1	2, 6	2, 7	2, 8	2, 9
Вариант 21 ÷ 30										
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Схема №	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8
$\mathbf{n_1}$	1	1	1	1	1, 3	1, 4	1, 2	1, 5	1, 1	1,2
$\mathbf{n_2}$	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{m_1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1, 6	1, 7
$\mathbf{m_2}$	0, 3	0, 5	0, 6	0, 7	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	0, 3	0, 4
$\mathbf{m_3}$	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	2, 6	2, 7	2, 8	2, 9	1	1

Тема 2. Кручение

Основные элементы теории определения деформаций и напряжений, возникающих при кручении валов (брусов)

Кручение – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственны силовой фактор – крутящий момент, обозначаемый $\mathbf{M_z}$ или $\mathbf{M_к}$. Кручение возникает при нагружении бруса парами сил, плоскость действия которых перпендикулярна его продольной оси. Моменты этих пар называют скручивающими (или вращающими) моментами и обозначаются $\mathbf{M}$.

При проработки этой темы необходимо изучить:

- теорию кручения бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения;
- зависимости между модулем сдвига, модулем продольной упругости и коэффициентом поперечной деформации;
- порядок построения эпюр крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений бруса при кручении;
- порядок расчёта на прочность и жёсткость при кручении бруса, виды расчётов.

В этой теме рассматриваются простые случаи воздействия вращающих моментов на брус круглого поперечного сечения.

Основные элементы теории определения деформаций и напряжений, возникающих при кручении валов (брусов)

Рассмотрим брус, жёстко защемлённый одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом **М** (рис. 10, а). При этом в каждом его сечении возникает крутящий момент $\mathbf{M_K}$, который численно равен алгебраической сумме моментов внешних пар, действующих на брус в плоскостях, перпендикулярных оси бруса, и приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

При деформации бруса его поперечные сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему первоначальному положению или, что одно и тоже, по отношению к неподвижному сечению (заделке). Угол поворота будет тем больше, чем дальше отстоит данное сечение от заделки. При этом угол поворота крайнего правого сечения $\mathbf{OB} = \mathbf{r}$ (рис. 10, б) поворачивается в положение $\mathbf{OB_1}$ на некоторый угол $\boldsymbol{\varphi}$, называемый углом закручивания.

На этот же угол $\boldsymbol{\varphi}$ поворачивается радиус $\mathbf{OC} = \boldsymbol{\rho}$ в положение $\mathbf{OC_1}$.

Угол поворота торцового сечения представляет собой полный угол закручивания бруса.

$$\boldsymbol{\varphi} = <\mathbf{BOB_1} = <\mathbf{CO}C_1$$

В процессе закрутки бруса его внешняя образующая **AB** и внутренняя образующая **EC** смещаются и возникают перекосы, определяемые углами сдвига $\boldsymbol{\gamma_m}$ для образующей **AB** или $\boldsymbol{\gamma}$ для образующей **EC**.

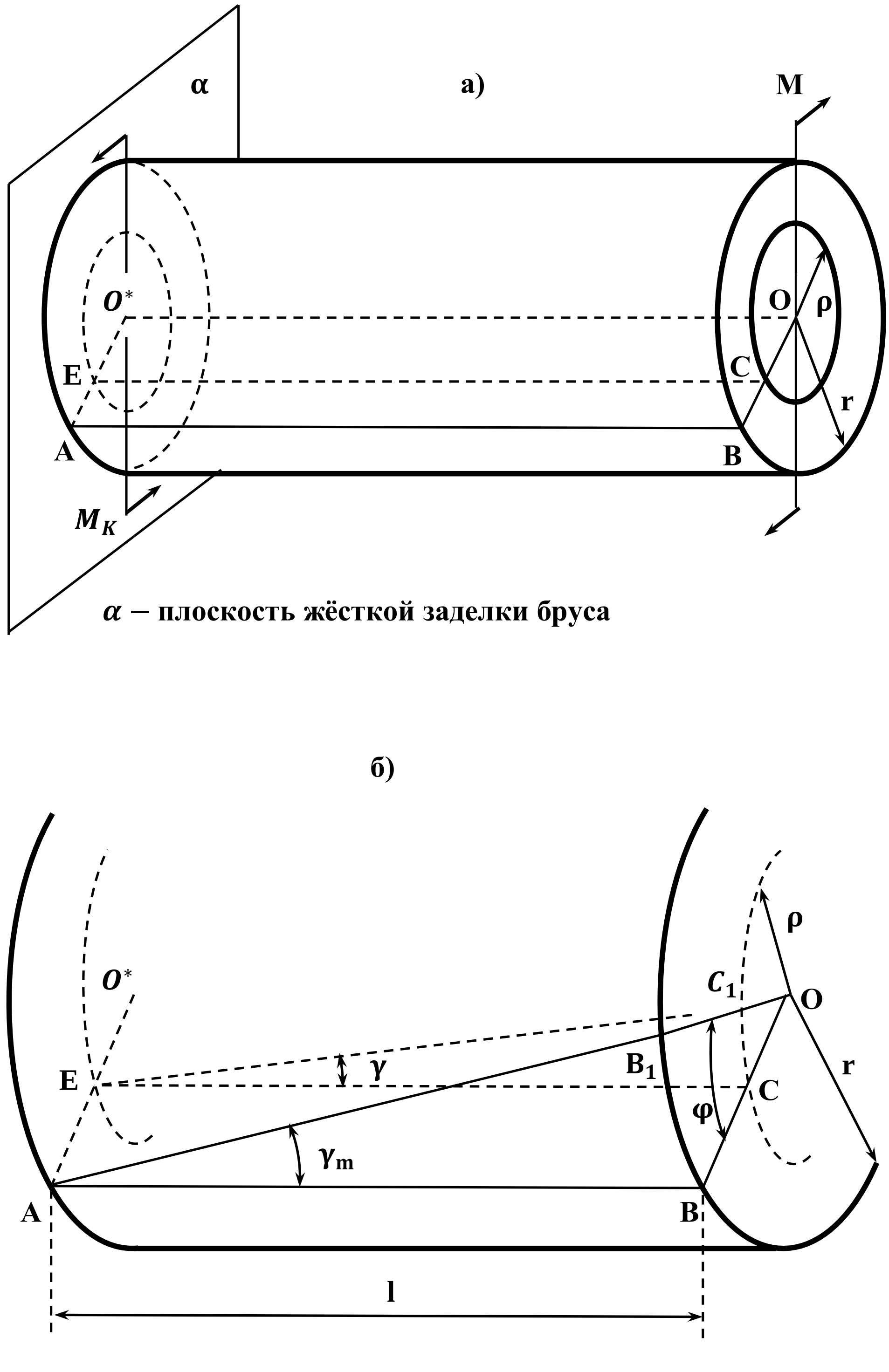


Рис. 10. Схема угловых перемещений точек сечений бруса при кручении

Учитывая малость деформаций ($\sin\boldsymbol{\gamma} = \tan\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$ в радианах) и выражая $\mathbf{BB_1}$ и $\mathbf{CC_1}$ как дуги окружностей, определим соотношения между углами сдвига $\boldsymbol{\gamma_m}$ или $\boldsymbol{\gamma}$ и углом закручивания бруса $\boldsymbol{\varphi}$.

$\mathbf{BB_1} = \boldsymbol{\gamma_m} \cdot \mathbf{l} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}$; $\mathbf{C}\boldsymbol{C_1} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{l} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\rho}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{l} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\rho} \ (2.1) \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{l} = \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r} \ (2.2) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{r}} \boldsymbol{\rho} \quad (4.2)$$

Таким образом, угол сдвига $\boldsymbol{\gamma}$ пропорционален расстоянию от оси вала $\boldsymbol{\rho}$.

Величина $\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{l}}$ называется относительным углом закручивания (или углом закручивания, приходящийся на единицу длины бруса) для каждого сечения является постоянной, так как выражается из (2.2) через постоянные $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{m}}$ и $\mathbf{r}$.

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{l}} = \frac{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{r}} = \text{const} \quad (4.3)$$

Сдвиг отдельных элементов бруса сопровождается в его поперечных сечениях касательными напряжениями $\boldsymbol{\tau}$, которые могут быть определены по закону Гука для сдвига:

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}\,\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{G}\,\frac{\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{r}}\,\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}} = \mathbf{G}\,\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{m}}$ при $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{G}$ – модуль сдвига,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{r}}\,\boldsymbol{\rho} \quad (4.4)$$

Таким образом, касательные напряжения в поперечных сечениях меняются по длине радиуса по линейному закону.

Крутящий момент $\mathbf{M}_{\mathbf{K}}$, как сумма моментов всех элементарных внутренних касательных сил, возникающих в поперечных сечениях определяется выражением

$$\mathbf{M}_{\mathbf{K}} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}}}{\mathbf{r}}\,\mathbf{I}_{\mathbf{P}}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{P}}$ – полярный момент инерции сечения, являющийся геометрической характеристикой жёсткости бруса.

Полярный момент инерции сечения для круглого сечения определяется выражением

$\mathbf{I}_{\mathbf{P}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{32}} \cdot \mathbf{d}^4$, где $\mathbf{d}$ – диаметр круга.

Полярный момент инерции сечения для кольцевого сечения определяется выражением

$\mathbf{I}_{\mathbf{P}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{32}} \cdot (\mathbf{d}^4 - \mathbf{d}_0^4)$, где $\mathbf{d}_{\,0}$ – внутренний диаметр кольца.

Величину $\mathbf{W}_{\mathbf{P}}$, равную отношению полярного момента инерции сечения к его радиусу, называют полярным моментом сопротивления сечения.

$$\mathbf{W}_{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{P}}}{\mathbf{r}}, \Rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}}\,\mathbf{I}_{\mathbf{P}} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{M}_{\mathbf{K}}}{\mathbf{W}_{\mathbf{P}}}. \quad (4.6)$$

Полярным момент сопротивления сечения для круглого сечения определяется выражением

$$\mathbf{W}_{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{2I}_{\mathbf{P}}}{\mathbf{d}}. \quad (4.7)$$

Прочность бруса, работающего на кручение, считают обеспеченной, если наибольшее касательное напряжение, возникающее в его опасном поперечном сечении, не превышает допустимого. Таким образом, прочность бруса, работающего на кручение, круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения определяется условием

$$\boldsymbol{\tau_m} = \frac{\mathbf{M_к}}{\mathbf{W_P}} \leq [\boldsymbol{\tau}_к], \quad (4.8)$$

где $[\boldsymbol{\tau}_к]$ - допустимое касательное напряжение.

Пример решения задания.

Построить эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений для ступенчатого стального бруса **AB** круглых поперечных сечений, изображённого на схеме (рис. 10, а). Проверить прочность бруса при допустимом значении касательного напряжения $[\boldsymbol{\tau}_к]$ = 60 МПа.

Брус жёстко заделан одним концом и нагружен скручивающими моментами: $\mathbf{M_1}$ = **M** = 1 кН· м, $\mathbf{M_2}$ = 2**M**, $\mathbf{M_3}$ = 4**M** как показано на рисунке. Модуль сдвига **G** для стали принять равным 8· 10^4 МПа.

Размеры бруса:

- длина участка бруса $\boldsymbol{\alpha}$ = 400 мм,
- диаметры поперечного сечения $\mathbf{d_1}$ = 60 мм, $\mathbf{d_2}$ = 50 мм, $\mathbf{d_3}$ = 80 мм.

Решение. Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены вращающие моменты $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ и изменения размеров поперечного сечения (рис. 11, а). В нашем примере получилось пять участков: **I**, **II**, **Ш**, **IV** и **V**.

Эпюру крутящих моментов строим, начиная от свободного (правого) конца, что позволяет не определять реактивный момент в заделке (рис. 11, б). Проведя произвольное сечение на участке **I**, отбрасываем левую часть бруса и, составляя для оставленной части уравнение равновесия $\sum_{\mathbf{i=1}}^{n} \mathbf{M_{oi}} = 0$, получаем $М_к^{\mathbf{I}}$ = $\mathbf{M_1}$. Согласно принятому правилу знаков, считаем этот момент отрицательным и равным – 1 кН· м. Для остальных участков находим крутящие моменты как алгебраические суммы внешних моментов, приложенных по одну сторону (в нашем случае правую) отсечения. Отсечённые части отдельно не изображаем. Необходимые для построения эпюры результаты вычислений значений крутящих моментов следующие:

- для участка **I** (**BN**) $М_к^{\mathbf{I}}$ = – 1 кН· м,
- для участка **II** (**NK**) $М_к^{\boldsymbol{II}}$ = – 1 кН· м,
- для участка **III** (**KD**) $М_к^{\boldsymbol{III}}$ = 1 кН· м,
- для участка **IV** (**DC**) $М_к^{\boldsymbol{IV}}$ = 1 кН· м,
- для участка **V** (**CA**) $М_к^{\boldsymbol{V}}$ = – 3 кН· м.

В соответствии с этими результатами построена и показана на (рис. 11, в) $\mathbf{M}_к$ (**z**) – эпюра крутящих моментов.

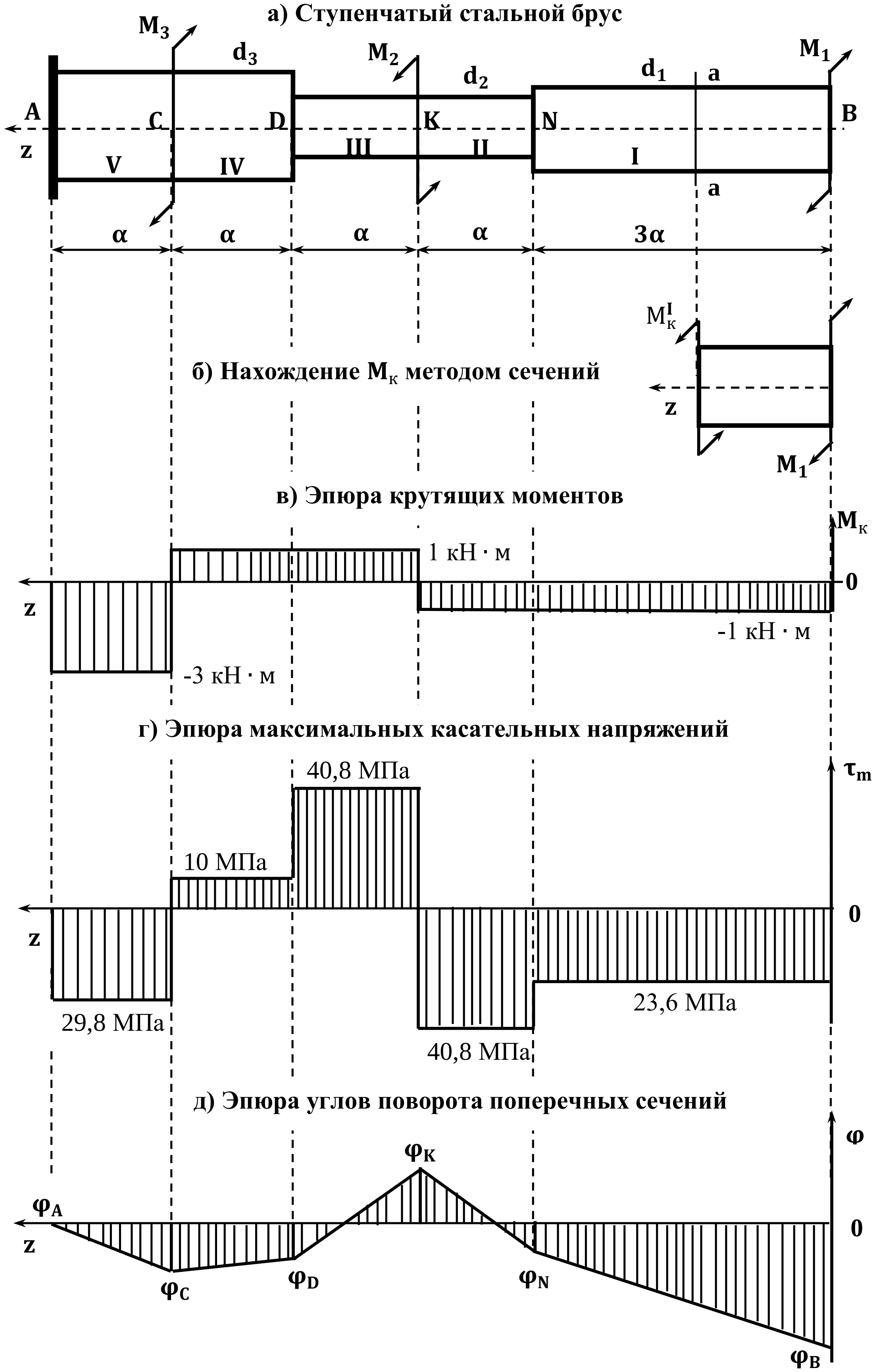


Рис. 11. Схема построения эпюр крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений

Для нахождения опасного сечения строим эпюру максимальных касательных напряжений, пользуясь формулой

$\boldsymbol{\tau_m} = \frac{\mathbf{M_к}}{\mathbf{W_P}}$, где $\mathbf{W_P} = \frac{\pi \mathbf{d}^3}{\mathbf{16}}$ или $\boldsymbol{\tau_m} = \frac{\mathbf{16M_к}}{\pi \mathbf{d}^3}$.

Для участка **I** (**BN**) $\boldsymbol{\tau_m^I} = -\frac{16 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot (6 \cdot 10^2)^3}$ = - 2,36· 10^7 = - 23,6· 10^6 (Па),

$\boldsymbol{\tau_m^I}$ = - 23,6 МПа.

Аналогичным образом определяем максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях остальных участков бруса:

- для участка **II** (**NK**) $\boldsymbol{\tau_m^{II}}$ = - 40,8 МПа,
- для участка **III** (**KD**) $\boldsymbol{\tau_m^{III}}$ = 40,8 МПа,
- для участка **IV** (**DC**) $\boldsymbol{\tau_m^{IV}}$ = 10 МПа,
- для участка **V** (**CA**) $\boldsymbol{\tau_m^{V}}$ = - 29,8 МПа.

В соответствии с этими результатами построена и показана на (рис. 11, г) $\boldsymbol{\tau_m}$ (**z**) – эпюра максимальных касательных напряжений в поперечных сечениях бруса. Ординаты $\boldsymbol{\tau_m}$ (**z**) – эпюры максимальных касательных напряжений откладываем в ту же сторону, что и соответствующие ординаты $\mathbf{M_к}$ (**z**) – эпюры крутящих моментов. Знак касательного напряжения при расчёте на прочность никакой роли не играет и принятое направление ординат эпюры условно.

Таким образом, наибольшие касательные напряжения возникают на **II** – м и **III** – м участках (**ND**). Именно на этих участках необходимо проверить выполнение условия прочности бруса при кручении

$\boldsymbol{\tau_m} < [\boldsymbol{\tau_к}]$.

Условие прочности бруса выполняется.

Эпюру углов поворота поперечных сечений бруса строим, начиная от защемлённого конца. В пределах каждого участка бруса эпюра линейна, поэтому достаточно вычислить углы поворота только для граничных сечений участков.

Угол поворота сечения **A** (жёсткой заделки) бруса равен нулю. Угол поворота сечения **C** относительно сечения **A** равен углу закручивания участка **AC** бруса.

Вычисление угла поворота поперечного сечения **C** ступенчатого стального бруса **AB** осуществляется по формуле

$\boldsymbol{\varphi_C} = \frac{M_к^{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{G} \cdot J_{\mathbf{P}}^{V}}$, $\boldsymbol{\varphi_C} = -\frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14 \cdot (8 \cdot 10^2)^4}$ = - 3,73· 10^{-3} (рад).

Аналогичным способом вычисляется угол поворота поперечного сечения **D** бруса **AB** относительно сечения **C**.

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{DC}} = \frac{M_{к}^{IV} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{G} \cdot J_{\mathbf{P}}^{\mathbf{IV}}}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{DC}} = \frac{10^3 \cdot 0{,}4 \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3{,}14 \cdot (8 \cdot 10^2)^4} = 1{,}24 \cdot 10^{-3} \text{ (рад).}$$

Очевидно, что угол поворота поперечного сечения **D** бруса **AB** относительно сечения **A** (относительно заделки) равен алгебраической сумме углов закручивания участков **AC** и **CD**.

$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{D}} =$ (- 3,73 + 1,24) · 10^{-3} = - 2, 49 · 10^{-3} (рад).

Аналогично вычисляют углы поворота остальных граничных сечений. Результаты вычислений углов поворота граничных сечений бруса, по которым построена эпюра углов поворота поперечных сечений (рис. 11, д) следующие:

- для сечения **A** (заделка бруса) $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{A}} = 0$,
- для сечения **C** $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{C}}$ = - 3,73· 10^{-3} рад,
- для сечения **D** $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{D}}$ = - 2, 49 · 10^{-3} рад,
- для сечения **K** $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{K}}$ = 5,63· 10^{-3} рад,
- для сечения **N** $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{N}}$ = - 2, 49 · 10^{-3} рад,
- для сечения **B** $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{B}}$ = - 14, 2· 10^{-3} рад.

Расчётно-графическое задание № 7. Определение крутящих моментов и напряжений в поперечных сечениях бруса при кручении

По данным табл. 4. 3 и исходных данных, представленных в табл. 4. 4, в соответствии с вариантом контрольной работы, постройте эпюры крутящих моментов, максимальных касательных напряжений и углов поворота поперечных сечений для ступенчатого стального бруса **AB** круглых поперечных сечений, изображённого на схеме (рис. 11, а). Проверьте прочность бруса при допустимом значении касательного напряжения $[\boldsymbol{\tau}_{\text{к}}]$ = 60 МПа.

Известно, что:

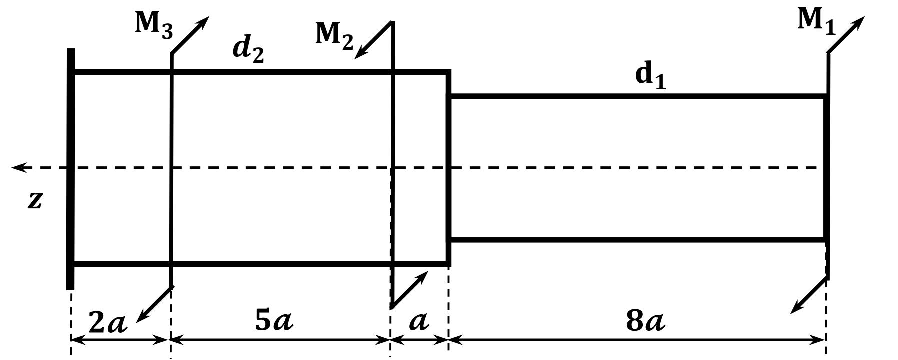
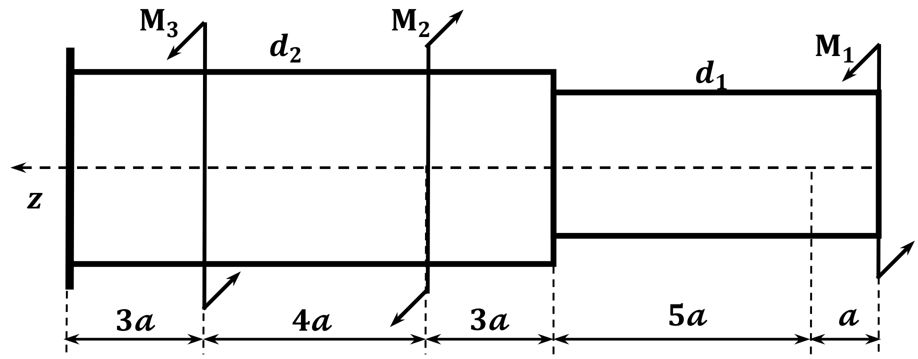
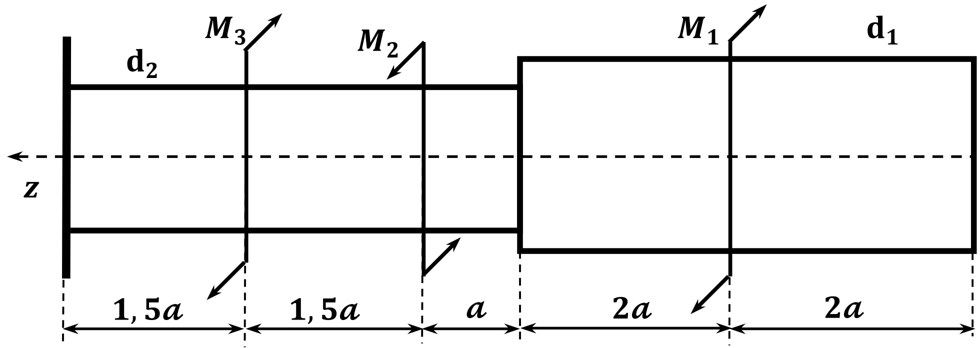
- внешние диаметры поперечных сечений бруса $\mathbf{d_1} = \mathbf{n_1} \cdot \mathbf{d}$, $\mathbf{d_2} = \mathbf{n_2} \cdot \mathbf{d}$, где **d** = 5 см;

- скручивающие (или вращающие) моменты, действующие на брус

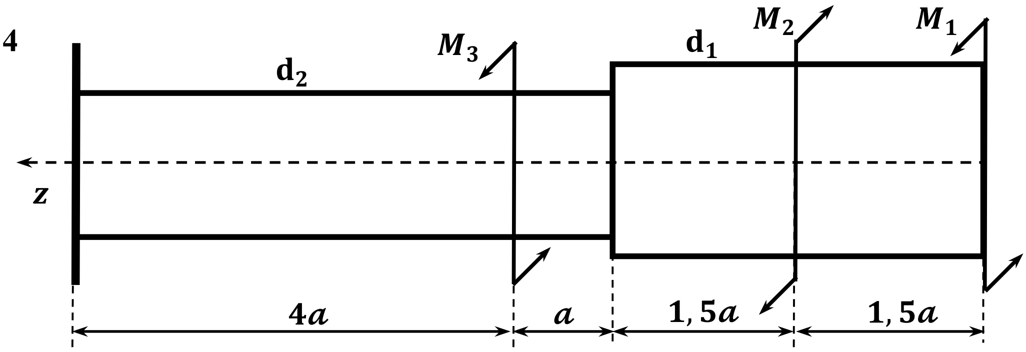
$\mathbf{M_1} = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{M}$, $M_2 = \mathbf{m_2} \cdot \mathbf{M}$, $\mathbf{M_3} = \mathbf{m_3} \cdot \mathbf{M}$, где **M =** 10 кН·м.

Таблица 4. 3

Схемы для заданий

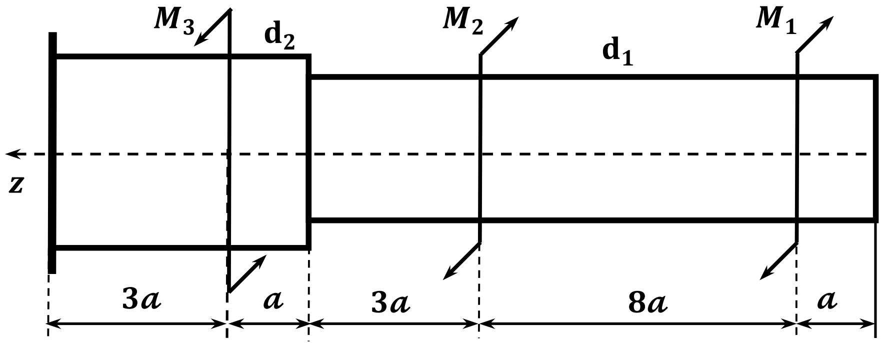
№ 1	
№ 2	
№ 3	

№ 4



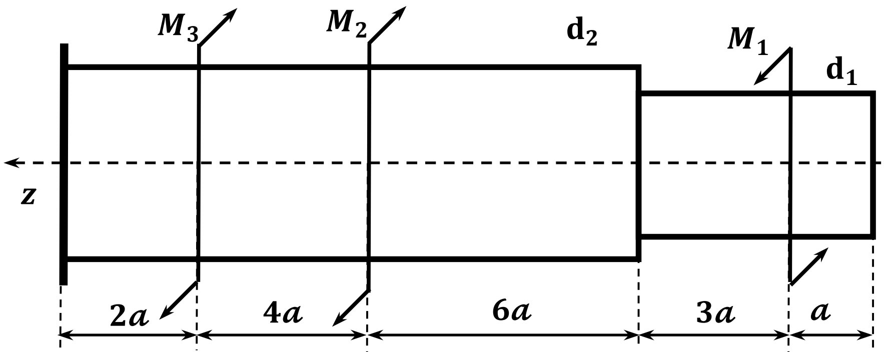
M_3
M_2
M_1
d_2
d_1
z
$4a$
a
$1,5a$
$1,5a$

№ 5



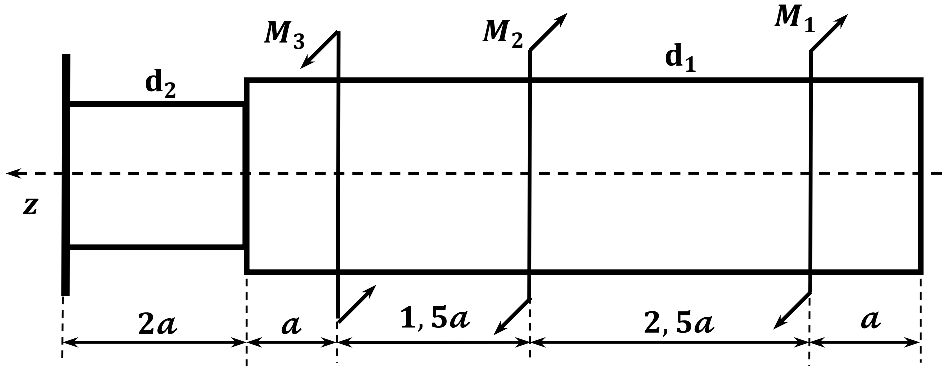
M_3
M_2
M_1
d_2
d_1
z
$3a$
a
$3a$
$8a$
a

№ 6



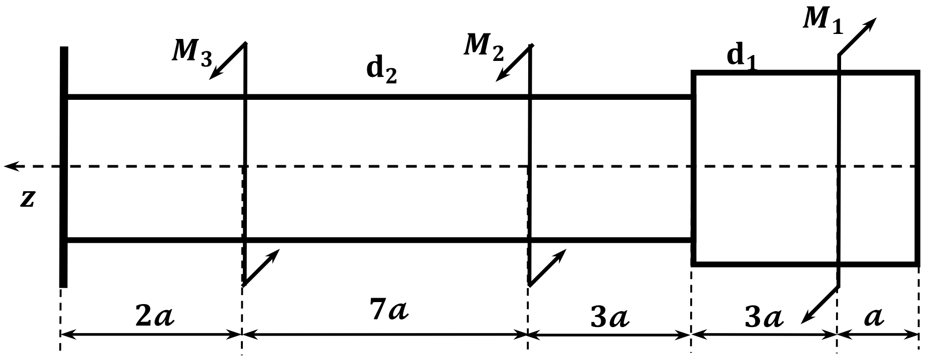
M_3
M_2
M_1
d_2
d_1
z
$2a$
$4a$
$6a$
$3a$
a

№ 7



M_3
M_2
M_1
d_2
d_1
z
$2a$
a
$1,5a$
$2,5a$
a

№ 8



№ 9

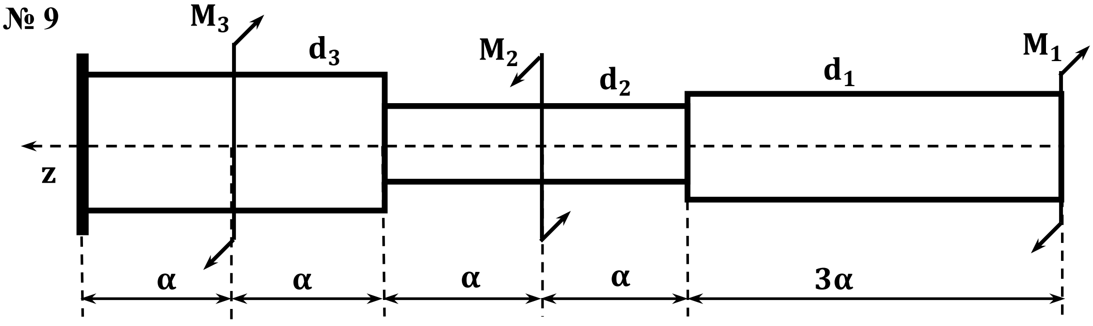


Таблица 4. 4

Исходные данные расчёта

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Схема №	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
$\mathbf{n_1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1, 2	1, 3
$\mathbf{n_2}$	1, 5	1, 4	1, 3	1, 2	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1	1
$\mathbf{m_1}$	1	1	1	1	0, 6	0, 7	0, 8	0, 5	1, 7	1, 8
$\mathbf{m_2}$	1, 2	1, 3	1, 6	1, 5	1	1	1	1	0, 3	0, 4
$\mathbf{m_3}$	2, 2	2, 4	2, 1	2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1	1
Вариант 11 ÷ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Схема №	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
$\mathbf{n_1}$	1, 4	1, 5	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1	1	1	1
$\mathbf{n_2}$	1	1	1	1	1	1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5
$\mathbf{m_1}$	1, 9	2	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1	1	1	1
$\mathbf{m_2}$	0, 5	0, 6	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	1, 1	1, 2	1, 3	1. 4
$\mathbf{m_3}$	1	1	1	1	1	1	2, 6	2, 7	2, 8	2, 9
Вариант 21 ÷ 30										
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Схема	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8

№										
$\mathbf{n_1}$	1	1	1	1	1, 3	1, 4	1, 2	1, 5	1, 1	1,2
$\mathbf{n_2}$	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{m}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1, 6	1, 7
$\mathbf{m}_2$	0, 3	0, 5	0, 6	0, 7	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	0, 3	0, 4
$\mathbf{m}_3$	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	2, 6	2, 7	2, 8	2, 9	1	1

Тема 3. Изгиб

Основные элементы теории определения деформаций и напряжений, возникающих при изгибе валов (брусов)

Изгиб – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$. С геометрической точки зрения изгиб характеризуется изменением кривизны оси бруса (прямая ось становится изогнутой).

В большинстве случаев одновременно с изгибающими моментами возникают и поперечные силы $\mathbf{Q}_x$, $\mathbf{Q}_y$; такой изгиб называют поперечным. Если поперечные силы не возникают, изгиб называют чистым. Ограничимся рассмотрением брусьев, поперечные сечения которых имеют по меньшей мере одну ось симметрии, например, ось $\mathbf{0y}$.

Как известно, ось симметрии $\mathbf{0y}$ и перпендикулярная ей ось $\mathbf{0x}$, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными центральными осями сечения. Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называют главной плоскостью бруса. В случае если силовая плоскость, то есть плоскость действия нагрузок, совпадает с одной из главных плоскостей бруса, то изгиб называется прямым.

При прямом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила $\mathbf{Q}_y$ и изгибающий момент $\mathbf{M}_x$. Брусья, работающие на прямой изгиб, принято называть **балками**.

Построение эпюр поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y\,(\mathbf{z})$ и изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x\,(\mathbf{z})$ начинается с определения опорных реакций балки. Для двух опорной балки, нагруженной силами, перпендикулярными её оси, рекомендуется определять реакции, составляя два уравнения моментов относительно центров шарнирных опор.

Основные правила построения эпюр.

1. Для участка балки, на котором отсутствуют распределённая нагрузка, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону (эпюра поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y\,(\mathbf{z})$ ограничена прямой, параллельной оси абсцисс, а эпюра изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x\,(\mathbf{z})$ – наклонной прямой).
2. Для участка балки с равномерно распределённой нагрузкой поперечная сила $\mathbf{Q}_y$ изменяется по линейному закону (эпюра ограничена наклонной прямой), а $\mathbf{M}_x$ – по квадратичному (эпюра ограничена параболой).
3. В сечении, где эпюра поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y\,(\mathbf{z})$ пересекает ось абсцисс, изгибающий момент $\mathbf{M}_x$ экстремален.
4. В том месте, где балке приложена сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y\,(\mathbf{z})$ получается скачкообразное изменение ординаты на величину приложенной силы, а на эпюре изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x\,(\mathbf{z})$ – изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры.
5. Если распределённая нагрузка направлена вниз, то эпюра изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x\,(\mathbf{z})$ очерчена параболой, обращённой выпуклостью вверх.

6. В сечении, где к балке приложена пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x(\mathbf{z})$ получается скачкообразное изменение ординаты на величину момента этой пары.

При построении эпюр поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y(\mathbf{z})$ и изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x(\mathbf{z})$ принимаются следующие правила знаков:

- внешняя сила, стремящаяся повернуть отсечённую часть балки по ходу часовой стрелки вокруг той точки, которая соответствует проведённому сечению, вызывает положительную поперечную силу;
- изгибающий момент считается положительным, если балка изгибается выпуклостью вниз, то есть сжатые волокна находятся в верхней чисти.

Пример решения задания.

Построить эпюры поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y(\mathbf{z})$ и изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x(\mathbf{z})$, для балки (рис. 12, а), постоянного круглого сечения, лежащей на двух опорах и нагруженной силой $\vec{\mathbf{F}}$, равной 100 кН.

Проверить прочность балки при допустимом значении нормального напряжения $[\boldsymbol{\sigma}]$, равным 160 Мпа.

Размеры балки:

- длина балки $\mathbf{l} = 1$ м,
- длина участка $\boldsymbol{\alpha} = 40$ см,
- диаметр поперечного сечения $\mathbf{d} = 12$ см.

Составим уравнения равновесия и найдём опорные реакции:

$$\sum \mathbf{M}_{\text{в}} = 0 \Rightarrow -\mathbf{F} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{a}} \cdot \mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}},$$

$$\sum \mathbf{M}_{\mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{R}_{\text{в}} \cdot \mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_{\text{в}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{l}}.$$

Разделим балку на два участка: **АС** и **СВ**, их границей является точка приложения силы $\vec{\mathbf{F}}$.

Поперечная сила в любом сечении на участке **АС** равна реакции $\mathbf{R}_{\boldsymbol{a}}$, она постоянна по всей длине участка и положительна, так как сила $\mathbf{R}_{\boldsymbol{a}}$, действующая на левую часть балки, направлена вверх.

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{I}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}}. \qquad (4.9)$$

Подставляя в выражение (4.9) условия задачи, получаем $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}} = 6 \cdot 10^4$ Н.

Поперечная сила в любом сечении на втором участке (**СВ**) равна разности сил $\mathbf{R}_{\boldsymbol{a}}$ и $\mathbf{F}$ и также постоянна по всей длине участка, но отрицательна

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{II}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{a}} - \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}} - \mathbf{F} = -\frac{\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{l}}. \qquad (4.10)$$

Подставляя в выражение (4.10) условия задачи, получаем $\mathbf{Q}_{\mathbf{II}} = -4 \cdot 10^4$ Н.

Эпюра поперечных сил $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_y(\mathbf{z})$ показана на рис. 12, б). В сечении **С**, где приложена сила $\mathbf{F}$, поперечная сила имеет скачок, равный значению $\mathbf{F}$, и меняет знак на противоположный.

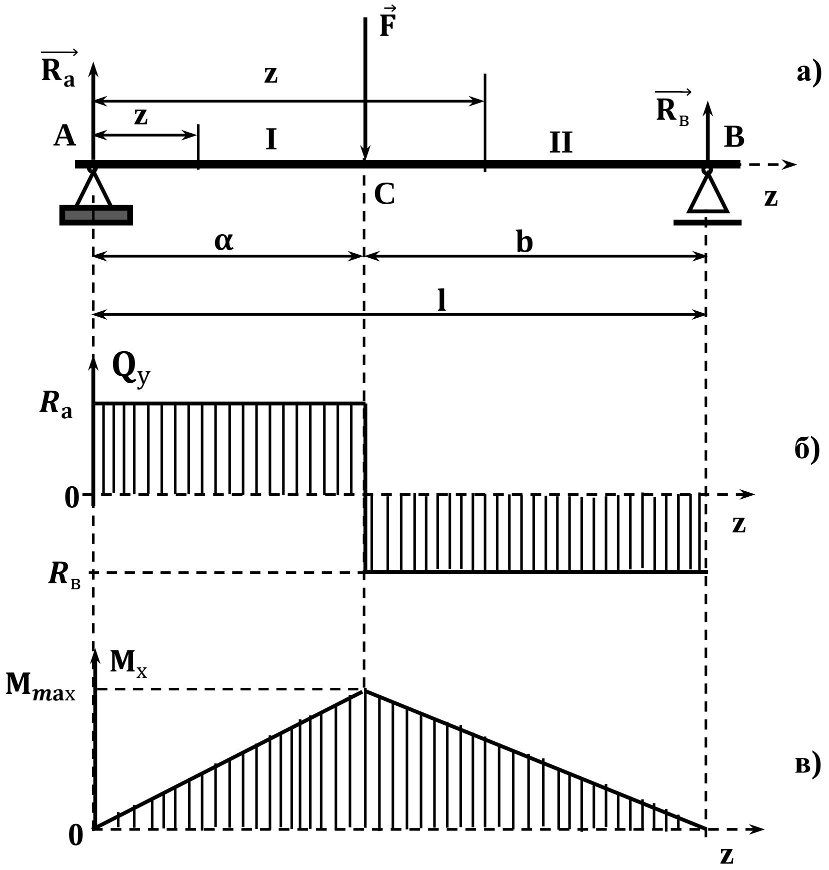


Рис. 12. Схема построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для балки, лежащей на двух опорах и нагруженной силой $\vec{\mathbf{F}}$.

Выражение изгибающего момента в любом сечении на участке **АС**, при изменении $\mathbf{z}$ в пределах от $\mathbf{z} = 0$ до $\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$ имеет вид

$$\mathbf{M_I} = \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{z} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{z}.$$

При $\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$ изгибающий момент принимает максимальное значение

$$\mathbf{M}_{x\,\mathbf{max}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}}. \qquad (4.11)$$

Подставляя в выражение (4.11) условия задачи, получаем $\mathbf{M}_{max} = 2{,}4 \cdot 10^4$ Н · м.

Этот момент положителен, так как $\mathbf{R}_a$ стремится повернуть левую часть во круг сечения по ходу часовой стрелки.

Изгибающий момент в любом сечении на участке **СВ**, при изменении $\mathbf{z}$ в пределах от $\mathbf{z} = \boldsymbol{\alpha}$ до $\mathbf{z} = \mathbf{l}$ имеет вид

$$\mathbf{M_{II}} = \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{z} - \mathbf{F} \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{F} \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\alpha}).$$

Эпюра изгибающих моментов $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_x(\mathbf{z})$ построена и показана на рис. 12, в).

Изгибающий момент имеет наибольшую величину

$$\mathbf{M}_{x\,\mathbf{max}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{l}}$$

в том сечении, в котором поперечная сила меняет знак. Определение максимального изгибающего момента позволяет выполнить расчёты на прочность при изгибе.

Расчёты на прочность при изгибе. Балки рассчитываются на прочность по наибольшим нормальным напряжениям, возникающих в их поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными возникают и касательные напряжения, но они невелики и при расчёте на прочность не учитываются. Прочность балки обеспечена, если наибольшее по абсолютному значению нормальные напряжения, возникающие в опасном поперечном сечении, не превышают допускаемых. Для балки, поперечные размеры которой по всей длине постоянны, опасное поперечное сечение то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент. В этом случае условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma_{max}} = \frac{\mathbf{M}_{x\,\mathbf{max}}}{\mathbf{W}_x} \le [\boldsymbol{\sigma}], \quad (4.12)$$

где:

- $[\boldsymbol{\sigma}]$ допускаемое нормальное напряжение, принимаемое таким же, как и при растяжении и сжатии,

- $\mathbf{W}_x$ осевой момент сопротивления.

Осевой момент сопротивления $\mathbf{W}_x$ – это геометрическая характеристика прочности бруса, работающего на изгиб. Осевой момент сопротивления $\mathbf{W}_x$ представляет собой отношение осевого момента инерции относительно данной оси к половине высоты сечения.

Осевой момент сопротивления сечения для круглого сечения, диаметром **d**, определяется выражением

$$\mathbf{W}_x = \frac{2\mathbf{I}_x}{\mathbf{d}}, \text{ или } \mathbf{W}_x = \frac{\pi \mathbf{d}^3}{32} \approx 0{,}1 \cdot \mathbf{d}^3. \quad (4.13)$$

Подставляя в выражение (4.13) условия задачи, получаем $\mathbf{W}_x = 5{,}12 \cdot 10^{-5}$ м^3.

Подставляя в формулу (4.12) найденные значения $\mathbf{M}_{x\,\mathbf{max}}$ и $\mathbf{W}_x$, получаем максимальное значение нормального напряжения, возникающего в опасном поперечном сечении балки

$\boldsymbol{\sigma_{max}} = 1{,}4 \cdot 10^8$ Па = 140 МПа.

Очевидно, что прочность балки при изгибе обеспечивается.

Расчётно-графическое задание № 8. Определение поперечных сил, изгибающих моментов и максимальных напряжений в поперечных сечениях бруса при изгибе

По данным табл. 4. 5 и исходных данных, представленных в табл. 4. 6, в соответствии с вариантом контрольной работы, постройте эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки. Проверьте прочность балки постоянного круглого сечения по всей длине, если её диаметр **d** равен 150 мм, а допускаемое нормальное напряжение при растяжении или сжатии [$\boldsymbol{\sigma}$] равно
180 Н/ мм^2.

Таблица 4. 5

Схемы для заданий

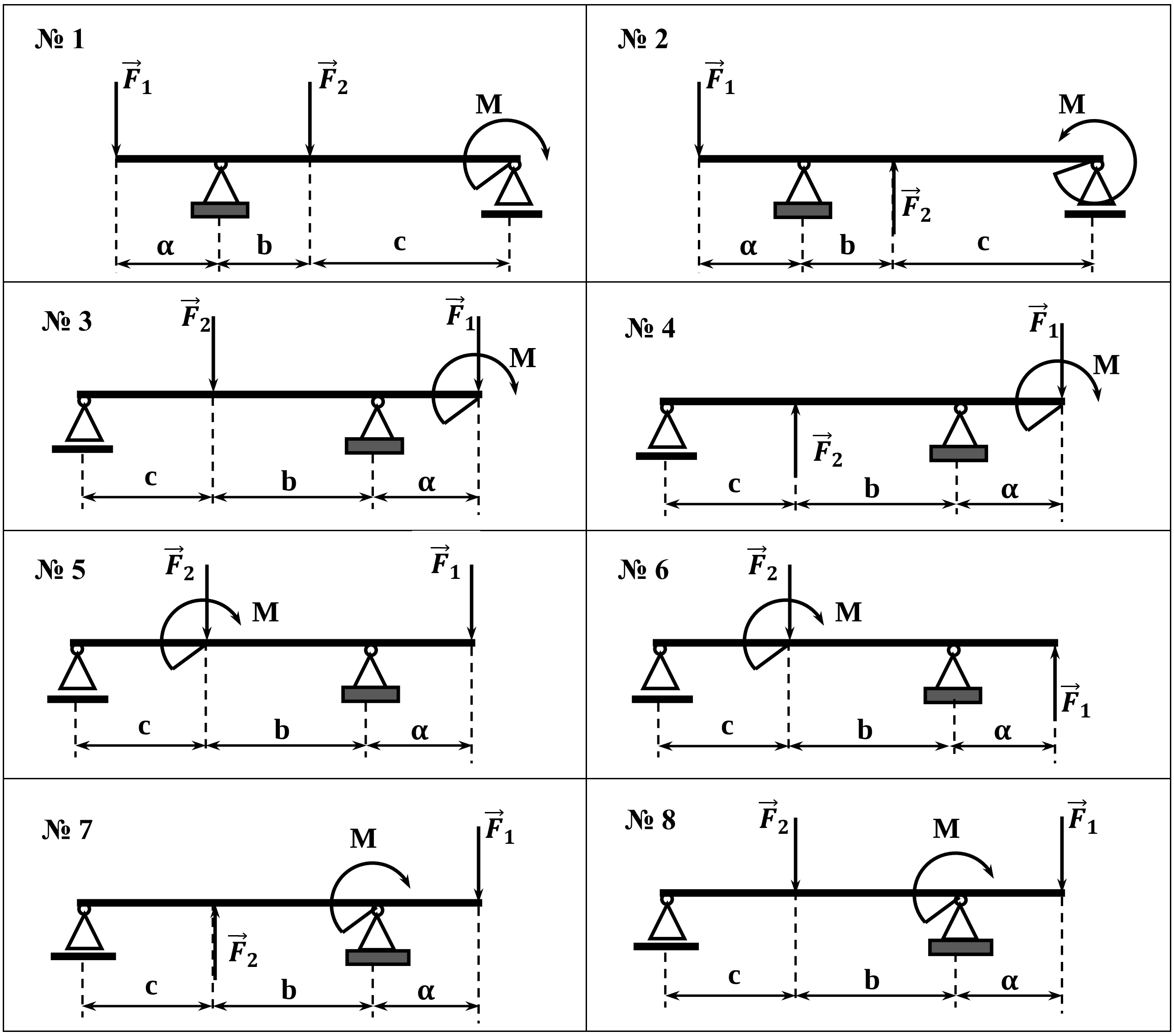


Таблица 4. 6

Исходные данные расчёта

Вариант 1 ÷ 10										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Схема №	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
M, кН· м	30	40	50	60	10	12	14	15	10	11
$\boldsymbol{F_1}$, кН	20	10	20	30	25	22	20	15	12	15
$\boldsymbol{F_2}$, кН	100	110	120	80	35	30	25	15	13	12
α, м	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9	1	0, 9	0, 8
b, м	1, 5	1, 8	1, 6	1, 7	2, 1	2, 2	2, 4	1, 3	1, 2	1, 4
c, м	1, 6	2, 1	2, 2	2, 8	2, 4	1, 6	1, 8	2, 1	1, 4	1, 5
Вариант 11 ÷ 20										
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Схема №	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
M, кН· м	13	15	14	15	16	17	10	11	12	13
$\mathbf{F_1}$, кН	16	18	17	18	19	20	11	12	13	14
$\mathbf{F_2}$, кН	10	12	13	14	15	16	12	13	14	15
α, м	0, 7	0, 6	0, 5	0, 4	0, 3	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7
b, м	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 4	1, 5	1, 6	1, 7	1, 8
c, м	1, 1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 6	1, 7	1, 8	1, 8	1, 9
Вариант 21 ÷ 30										
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Схема №	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8
M, кН· м	14	15	16	17	18	19	20	15	14	13
$\mathbf{F_1}$, кН	15	16	17	18	19	20	20	16	15	14
$\mathbf{F_2}$, кН	16	17	18	19	20	20	20	17	16	155
α, м	0, 8	0, 9	0, 8	0, 7	0,6	0, 5	0, 4	0, 3	0, 3	0, 4
b, м	1, 9	2	2, 1	2,2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 4	1, 3	1, 4
c, м	2	1, 9	1, 8	1, 7	1, 6	1, 5	1, 4	1, 5	1, 4	1, 5

Литература

1. А. И. Винокуров Сборник задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для учащихся машиностр. спец. техникумов. - М.: «Высш. шк.»,1990. – 383 с.: ил.

2. Акуша А. И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учеб. для машиностр. спец. Техникумов. – 2-е изд., доп. - М.: Высш. шк., 1989. – 352 с.: ил.

3. Алмаметов Ф. З., Арсеньев С. И., Еигалычев С. А., Курицин Н. А., Мишин А. М. Расчётные и курсовые работы по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов. - М.: «Высшая школа», 1992. 320 с.: ил.

4. Березовский Ю. Н., Чернилевский Д. В. Руководство по проведению лабораторных работ по технической механике. – М.: Высш. Школа, 1979. – 47 с., ил.

5. Г. М. Ицкович, А. И. Винокуров, Н. В. Барановский. Сборник задач по сопротивлению материалов. Учебное пособие для техникумов. Изд. «Судостроение». Ленинграл. 1972. – 230 с.

6. Гольдин И. И., Прокофьев Ю. В. Основы технической механики. Учеб. пособие для подгот. Рабочих. М., «Высшая школа», 1974. 352 с. с ил.

7. Дубейковский Е. Н., Саввушкин Е. С. сопротивление материалов: Учеб. пособие для машиностр. спец. техникумов. - М.: Высш. шк., 1985. – 192 с., ил.

8. Е. М. Никитин Теоретическая механика для техникумов: Учебник для техникумов. Изд. «Наука» - М: 1972. - 430 с.

9. Иродов И. Е. Основные законы механики: Учеб. пособие для физ. спец. вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1985. – 248 с., ил.

10. Ицкович Г. М. Методика преподавания сопротивления материалов в техникумах: Учеб.-метод. пособие для преподавателей машиностроит. техникумов / Под ред. А. И. Акуши. – 2-е изд., перераб. - М.: Высш. шк., 1990. – 224 с.: ил.

11. Ицкович Г. М. Сопротивление материалов: Учебник для учащихся машиностроит. техникумов. – 6-е изд., испр. - М.: Высш. школа, 1982. - 383., ил.

12. Куприянов Д. Ф. и Мельников Г. Ф. Техническая механика. Учебник для техникум. Изд. 3-е, перераб. М., «Высшая школа», 1975 г. 448 с. с илл.

13. Мерзон В. И. Теоретическая механика (краткий курс). Изд. 3-е, переработ. Учебник для техникумов. М., «Высшая школа», 1972. 240 с. с илл.

14. Методические рекомендации по преподаванию технической механики в средних специальных учебных заведениях. Вып. 11. - М.: Высш. шк., 1988. – 102 с.: ил.

15. Методические рекомендации по технической механике. – М 54 М: Высш. шк., 1985. Вып. 8. -96 с., ил.

16. Мовнин М. С., Израелит А. Б., Рубашкин А. Г. Основы технической механики - Учебник для немашиностроительных специальностей техникумов.
– Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990 г. 288 с., ил.

17. Мовнин М. С., Израелит А. Б. Техническая механика. Часть вторая. Сопротивление материалов. Учебник. (Изд. 5-е) Л., «Судостроение», 1971 г.

18. Осадчий В. А., Файн А. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. Изд. 2-е перераб. Учеб. пособие для техникумов. - М.: «Высшая школа», 1972. - 256 с.: ил.

19. Портаев Л. П. и др. Техническая механика: Учеб. для техникумов /

Л. П. Портаев, А. А. Петраков, В. Л. Портаев: Под ред. Л. П. Портаева. – М.: Стройиздат, 1987. – 464 с.

20. Справочник по сопротивление материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.; Отв. ред. Писаренко Г. С. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук думка. 1988. – 736 с.

21. Файн А. М. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для техникумов. – 2-е изд., испр. И доп. - М.: «Высшая школа», 1987. - 256 с.: ил.

22. Эрдеди А. А. Техническая механика: Теоретическая механика. Сопротивление материалов: Учеб. для машиностр. техникумов / А. А. Эрдеди, Ю. А. Медведев, Н. А. Эрдеди. – 3- е изд., перераб. И дот. – М.: Высш. шк., 1991. – 304 с.: ил.